Aufgaben zur Höheren Mathematik

50 Punkte

Wolfgang K. Seiler

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*

Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die stetigen Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(3) = f(-3)$ bilden einen Vektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Eine $n \times n$-Matrix A mit $A^2 = 0$ hat Determinante null.

3) *Richtig oder falsch:* Wenn die Niveaulinien einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ konzentrische Kreise (oder deren Mittelpunkt) sind, hängt die Funktion, in Polarkoordinaten geschrieben, nur vom Radius r ab.

4) Was ist $\iiint_{\mathcal{K}} x \, dx \, dy \, dz$ für $\mathcal{K} = \left\{(x, y, z \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; |x| \le 3 \wedge y^2 + z^2 \le 100\right\}$?

5) Welchen Korrelationskoeffizient haben die vier Datenpaare $(\pm 1, \pm 1)$?

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a$ des linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \;!$$

(Hinweis: Falls Sie es dem Schwierigkeiten mit dem charakteristischen Polynom haben: Sie sollten sowohl der Matrix als aus dem charakteristischen Polynom ansehen, daß mindestens eine kleine natürliche Zahl Eigenwert ist.)

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*

Der $\mathbb{R}$-Vektorraum V sei erzeugt von den Funktionen $1, \sin x, \cos x, \sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x$.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

b) Zeigen Sie: Die Vorschrift $f \mapsto f'' + 4f$ definiert eine lineare Abbildung $V \to V$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix dieser linearen Abbildung bezüglich der in *a)* gefundenen Basis!

d) Bestimmen Sie die Dimensionen von Kern und Bild dieser linearen Abbildung!

Aufgabe 4: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die reelle Fourier-Reihe der Funktion

$$f(t) = e^{2t} + e^{-2t} \quad \text{für } -1 \le t < 1,$$

periodisch fortgesetzt auf $\mathbb{R}$ durch die Bedingung $f(t + 2) = f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$!

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

Berechnen sie die FOURIER-Transformierte der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} 9 - t^2 & \text{für } |t| < 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad !$$

Aufgabe 6: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle Punkte in der offenen Kreisscheibe $x^2 + y^2 < 1$, in denen die Funktion $f(x, y) = \sin^2(x + y) + \cos^2(x - y)$ ihr absolutes Maximum annimmt!

b) Gibt es auch Punkte auf der Kreis*linie* $x^2 + y^2 = 1$, in denen der in *a)* bestimmte Maximalwert angenommen wird?

Aufgabe 7: *(7 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeinste Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + 2y(t) + 3z(t) \\ \dot{y}(t) &= 4y(t) + 5z(t) \\ \dot{z}(t) &= 6z(t) \quad ! \end{aligned}$$

b) Welche dieser Lösungen bleiben für $t \to \infty$ beschränkt?

Aufgabe 8: *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie alle zweifach stetig differenzierbaren Funktionen $x(t)$, für die gilt:

$$\ddot{x}(t) + 6\dot{x}(t) + 34x(t) = 33 \sin t + 6 \cos t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0 \ !$$

Steht Ihr Name auf jedem Blatt ?