Wolfgang K. Seiler D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

Kleine Übungen am 1. Februar 2000

• Rückgabe und Besprechung der Übungsblätter •
• Fragen zur Vorlesung und zu vergangenen Übungen •
• Fragen und Beispiele zum aktuellen Vorlesungsstoff •

Themenvorschläge

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} to \mathbb{R}^2$ hänge, in Polarkoordinaten (r,φ) geschrieben, nur ab von φ. Wie sehen die Niveaulinien von f aus?

b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ hänge, in Kugelkoordinaten (r,φ,ϑ) geschrieben, nur ab von ϑ. Wie sehen die Niveauflächen von f aus?

c) Richtig oder falsch: Für zwei Vektorfelder $\vec V, \vec W$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{div}(\lambda\vec V + \mu\vec W) = \lambda \operatorname{div} \vec V + \mu \operatorname{div} \vec W\,.$$

d) Richtig oder falsch: Für zwei Vektorfelder $\vec V, \vec W$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{rot}(\lambda\vec V + \mu\vec W) = \lambda \operatorname{rot} \vec V + \mu \operatorname{rot} \vec W\,.$$

e) Berechnen Sie die Rotation des Vektorfelds

$$\vec V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3; \quad (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} yz^2 \\ x^2z \\ xy^2 \end{pmatrix}\ !$$

f) Das Vektorfeld $\vec V$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ordne dem Punkt mit Polarkoordinaten (r,φ) den Vektor $\binom{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ aus $\mathbb{R}^2$ zu. Zeigen Sie, daß dieser Vektor in jedem Punkt (x,y) senkrecht auf dem Ortsvektor $\binom{x}{y}$ steht!

g) Auf der Kugel mit Radius R und Kugelkoordinaten (r,φ,ϑ) bezeichnet man die Kurven $\gamma_1\colon \varphi \mapsto (R,\varphi,\vartheta)$ als Breitenkreise und die Kurven $\gamma_2\colon \vartheta \mapsto (R,\varphi,\vartheta)$ als Längengrade. Berechnen Sie die Tangentenvektoren an beide Kurven!

h) Bestimmen Sie, durch Übergang zu Polarkoordinaten, alle relativen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = \cos(x^2+y^2) + \sin(x^2+y^2)\ !$$

i) Was ist Δf für die Funktion

$$f(x,y,z) = z^2\sqrt{x^2+y^2} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ?$$

j) Für welche $a > 0$ ist

$$\Delta\left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\right) = 0\ ?$$