Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

16. Dezember 1999

9. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Gleichgewichtspunkte eines linearen homogenen Differentialgleichungssystems bilden eine Vektorraum.

2) *Richtig oder falsch:* Das System $\dot{x}(t) = y(t)$ und $\dot{y}(t) = -6y(t) - 25x(t) + \cos 7t$ hat genau eine Gleichgewichtslösung.

3) *Richtig oder falsch:* Wenn kein Eigenwert von A positiven Realteil hat, bleibt die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ für alle $t \geq t_0$ beschränkt.

4) Welche Fixpunkte hat das System $\dot{x}(t) = 2x(t) - 5y(t)$ und $\dot{y}(t) = 10y(t) - 4x(t)$?

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*
In einem Ökosystem lebe eine Tierart, die sich nach der logistischen Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t)\big)$ vermehrt. Nun komme eine zweite Art, die dieselben Resourcen nutzt und sich gemäß der Gleichung $\dot{y}(t) = \mu x(t)\big(N - y(t)\big)$ mit $N > M$ vermehrt. Da sich die beiden Arten gegenseitig Resourcen wegnehmen, gelten für das Gesamtsystem nun die Differentialgleichungen $\dot{x}(t) = \lambda x(t)\big(M - x(t) - y(t)\big)$ und $\dot{y}(t) = \mu y(t)\big(N - x(t) - y(t)\big)$.

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte dieses System und untersuchen Sie deren Stabilität!

b) Skizzieren Sie grob das Vektorfeld zu diesem Differentialgleichungssystem und folgern Sie daraus, wie sich das System langfristig entwickeln wird!

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*

a) Untersuchen Sie die Stabilität des Fixpunkts $(0, 0)$ des Raubtier-Beutetier-Systems

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \quad \text{und} \quad \dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)\,!$$

b) Linearisieren Sie die Raubtier-Beutetier-Gleichung in der Umgebung des anderen Fixpunkts und lösen Sie das linearisierte System. Welche Form haben die Lösungskurven?

c) Das Raubtier-Beutetier-System kann auch benutzt werden zur Beschreibung eines Systems aus einem Nützling (Raubtier) und einem Schädling (Beutetier). Wie verschiebt sich das Gleichgewicht, wenn man durch ein Schädlingsbekämpfungsmittel die Wachstumsrate α der Schädlinge auf ein Zehntel senkt und (wegen der Nebenwirkungen) γ um 10% erhöht?

d) Während des ersten Weltkriegs stieg der Anteil an Raubfischen in den Netzen italienischer Fischer dramatisch an. Erklären Sie dies durch den kriegsbedingten Rückgang der Fischerei!

Aufgabe 3: (*3 Punkte)*
Welche Bedingungen müssen die Parameter des Lorenz-Systems erfüllen, damit der Nullpunkt ein stabiler Gleichgewichtspunkt wird?

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 23. Dezember 1999 um 14.15 Uhr