WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

25. November 1999

6. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Finden Sie eine $n \times n$-Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so daß $e^A = -E$ die negative Einheitsmatrix ist!

2) Richtig oder falsch: Für eine $n \times n$-Matrix A gilt: $\det e^A = e^{\det A}$.

3) Richtig oder falsch: (A_i) sei eine konvergente Folge von $n\times n$-Matrizen. Dann konvergiert auch die Folge der Matrizen e^{A_i}.

4) Richtig oder falsch: Die Matrizen e^A und $e^{(A^2)}$ kommutieren.

5) Richtig oder falsch: Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei A^m gleich der Nullmatrix. Dann ist jeder Eintrag von e^{At} ein Polynom vom Grad $\le m-1$ in t.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*
Für eine $n \times n$-Matrix A sei $\sin A = \frac{1}{2i}(e^{iA} - e^{-iA})$ und $\cos A = \frac{1}{2}(e^{iA} + e^{-iA})$.

a) Zeigen Sie: $\sin^2 A + \cos^2 A = E$

b) Finden Sie eine Matrix $P \ne 0$, so daß für alle $n \times n$-Matrizen A und alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sin(A + rP) = \sin A \quad \text{und} \quad \cos(A + rP) = \cos A\,.$$

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

a) Zeigen Sie: Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^{n+1}\cdot n \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Gilt diese Formel auch für negative ganze Zahlen n?

c) Berechnen Sie für $t \in \mathbb{R}$ die Matrix e^{At} !

d) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + y(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) \end{aligned}$$

e) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $x(0) = 1$ und $y(0) = -1$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*
Bestimmen Sie jene Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2x(t) \\ \dot{y}(t) &= y(t) + z(t) \\ \dot{z}(t) &= z(t) - x(t)\,, \end{aligned}$$

die den Anfangsbedingungen $x(0) = 3$, $y(0) = 5$ und $z(0) = 7$ genügt!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 2. Dezember 1999 um 14.15 Uhr