Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

28. Oktober 1999

2. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur reelle Werte annimmt, ist $\widehat{f}(\omega)$ eine gerade Funktion.

2) Richtig oder falsch: Für eine ungerade Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\widehat{f}(\omega)$ rein imaginär.

3) Richtig oder falsch: Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}}$ ist Eigenvektor der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R});\ f \mapsto \widehat{f}$.

4) Was ist $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cos(x^3 + y^3)$?

5) Richtig oder falsch: Wenn für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sowohl $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ als auch $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ identisch verschwinden, ist f linear.

Aufgabe 1: (*6 Punkte*)
Berechnen Sie die Fourier-Transformierten von

a) $f(t) = \begin{cases} 4 - t^2 & \text{für } |t| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

b) $g(t) = \begin{cases} \cos t & \text{für } |t| < 10\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ habe eine Fourier-Transformierte und erfülle die Gleichung

$$\ddot{f}(t) + 2\dot{f}(t) + 4f(t) = e^{\frac{-t^2}{2}} .$$

Dann ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}e^{\frac{-\omega^2}{2}}}{4 + 2i\omega - \omega^2} .$$

Aufgabe 3: (*4 Punkte*)
Laut Vorlesung ist die Fourier-Transformierte von $N_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}$ für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$ gleich der Funktion $g_\sigma(\omega) = e^{\frac{-\sigma^2\omega^2}{2}}$.

a) Berechnen Sie für alle $t, \omega \in \mathbb{R}$ die Grenzwerte $\lim\limits_{\sigma \to 0} N_\sigma(t)$ und $\lim\limits_{\sigma \to 0} g_\sigma(\omega)$!

b) Interpretieren Sie das Ergebnis als Aussage über die (inverse) Fourier-Transformation der Funktion $f(t) = 1$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 4. November 1999 um 14.15 Uhr