Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

24. März 2000

Nachklausur und 17. Übungsblatt Höhere Mathematik II mit Lösungen

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine invertierbare Matrix A ist $e^{A^{-1}} = \left(e^A\right)^{-1}$.

Lösung: *Falsch,* beispielsweise ist für die Einheitsmatrix E

$$e^{E^{-1}} = e^E = \begin{pmatrix} e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{-1} \end{pmatrix} = \left(e^E\right)^{-1}.$$

2) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = -1/\sin\bigl(x(t)\bigr)$ mit $x(0) = \pi/2$!

Lösung: Wir bringen $\sin\bigl(x(t)\bigr)$ auf die andere Seite und integrieren beide Seiten:

$$\int_0^t \sin\bigl(x(\tau)\bigr)\,\dot{x}(\tau)\,d\tau = \int_{x(0)}^{x(t)} \sin u\,du = -\cos\bigl(x(t)\bigr) \quad \text{und} \quad \int_0^t (-1)\,dt = -t\,.$$

Also ist $x(t) = \arccos t$.

3) Die Niveaulinien von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien allesamt Geraden parallel zur x-Achse. Was können Sie über f sagen?

Lösung: $f(x, y)$ hängt erstens nicht von x ab, da man bei Variation von x auf derselben Nivealinie bleibt; zweites ist f als Funktion von y allein injektiv, da es sonst Nivealinien gäbe, die aus mehreren Geraden bestehen.

4) Wie viele und welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2, \quad \dot{y}(t) = x(t) \cdot \bigl(y(t)^2 - 4\bigr)\ ?$$

Lösung: Für eine Gleichgewichtslösung müssen $\dot{x}(t)$ und $\dot{y}(t)$ identisch verschwinden. Also ist $x(t) = \pm y(t)$ nach der ersten Gleichung und entweder $x(t) \equiv 0$ oder $y(t) \equiv \pm 2$ nach der zweiten. Es gibt also die fünf Gleichgewichtslösungen $(0, 0)$, $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ und $(-2, -2)$.

5) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x, y) = \begin{pmatrix} y/(x^2 + y^2) \\ x/(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$ hat eine Stammfunktion.

Lösung:

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Hätte $\vec{V}$ eine Stammfunktion φ müßte beides gleich φ_{xy} sein, was offensichtlich nicht geht.

6) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 3, \pm 3)$. Was ist $\iint\limits_Q y\,dx\,dy$?

Lösung:

$$\iint\limits_Q y\,dx\,dy = \int\limits_{-3}^{3}\left(\int\limits_{-3}^{3} y\,dy\right)\,dx = 0\,,$$

da y eine ungerade Funktion ist und der Integrationsbereich symmetrisch zur x-Achse.

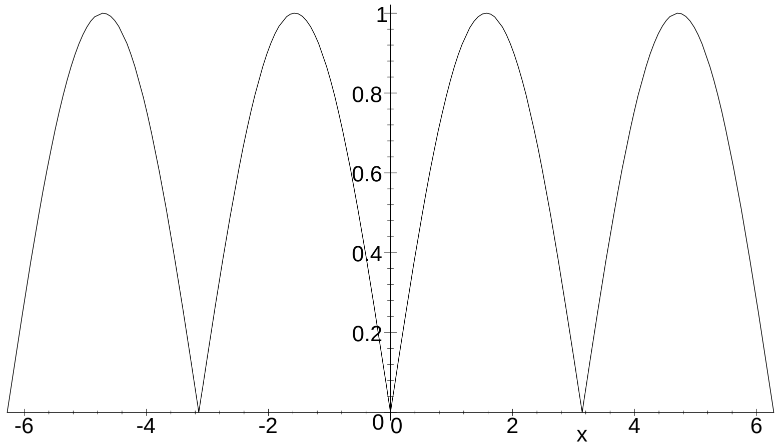
7) *Richtig oder falsch:* Die Standardabweichung einer Meßreihe wird kleiner, wenn man die Anzahl der Messungen erhöht.

Lösung: *Falsch;* nur die Standardabweichung des *Mittelwerts* wird kleiner. Die Standardabweichung des Meßreihe selbst sagt etwas über die Fehler der Einzelmessungen aus, und die sind unabhängig von deren Anzahl.

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = |\sin t|$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

Lösung:



b) Welche Periode hat f ?

Lösung: π, denn durch den Betrag sieht die Funktion in der zweiten Hälfte des Periodenintervalls $[0, 2\pi]$ des Sinus genauso aus wie in der ersten.

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f !

Lösung: Da $|\sin t|$ eine gerade Funktion ist, treten keine Sinusterme auf.

Bei der Bestimmung der restlichen Terme arbeiten wir mit dem Periodenintervall $[0, \pi]$, in dem der Sinus nicht negativ wird; deshalb können wir die Betragsstriche weglassen.

Der konstante Term ist

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = \frac{-\cos \pi + \cos 0}{\pi} = \frac{2}{\pi} \, .$$

Ansonsten haben wir noch Terme der Form $a_k \cos 2kt$ mit

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos 2kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \cdot \frac{e^{2kit} + e^{-2kit}}{2} \, dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{e^{(2k+1)it} - e^{-(2k+1)it}}{2i} - \frac{e^{(2k-1)it} - e^{-(2k-1)it}}{2i} \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \big(\sin(2k+1)t - \sin(2k-1)t \big) \, dt \\
&= \frac{-\cos(2k+1)\pi + \cos 0}{(2k+1)\pi} - \frac{-\cos(2k-1)\pi + \cos 0}{(2k-1)\pi} \\
&= \frac{2}{(2k+1)\pi} - \frac{2}{(2k-1)\pi} = \frac{-4}{(4k^2-1)\pi} \, .
\end{aligned}$$

Die FOURIER-Reise von $|\sin t|$ ist also

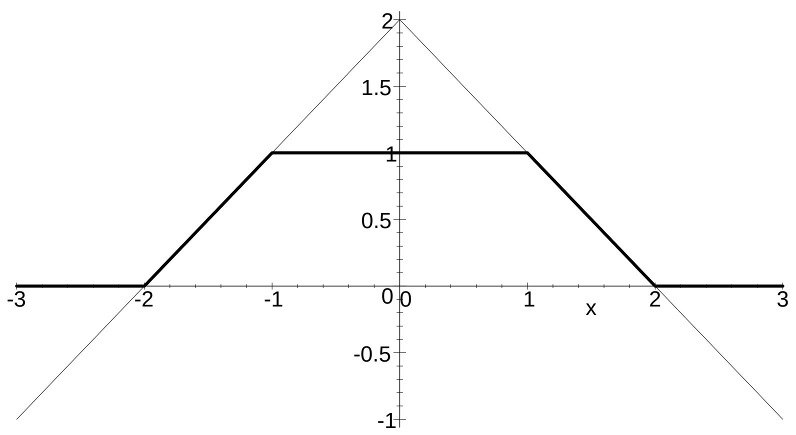
$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1} \, .$$

Aufgabe 2: (*7 Punkte*)

a) Skizzieren Sie die Funktionen $f(t) = 2 - |t|$ und

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(t) > 1 \\ 0 & \text{falls } f(t) < 0 \\ f(t) & \text{sonst} \end{cases} \; !$$

Lösung: Mit f dünn und g dick gezeichnet sieht das so aus:



b) Berechnen Sie die FOURIER-Transformierte von g! (*Hinweis:* Sie sparen viel Arbeit, wenn Sie Symmetrie ausnutzen!)

Lösung: Die einzige Symmetrie, die sich hier ausnutzen läßt, ist offensichtlich die Symmetrie zur y-Achse, und die läßt sich nur ausnutzen, wenn wir $e^{-i\omega t}$ in Real- und Imaginärteil zerlegen. Die FOURIER-Transformierte von g ist dann, da Cosinus gerade ist und Sinus ungerade, gleich

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-2}^{2} g(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-2}^{2} g(t)\,\cos\omega t\,dt = 2\int_{0}^{2} g(t)\,\cos\omega t\,dt \\
&= 2\int_0^1 \cos\omega t\,dt + 2\int_1^2 (2-t)\cos\omega t\,dt = \frac{2}{\omega}\sin\omega + 4\int_1^2 \cos\omega t\,dt - 2\int_1^2 t\cos\omega t\,dt \\
&= \frac{2}{\omega}\sin\omega + \frac{4}{\omega}(\sin 2\omega - \sin\omega) - 2\left(\left.\frac{t\sin\omega t}{\omega}\right|_1^2 - \int_1^2 \frac{\sin\omega t}{\omega}\,dt\right) \\
&= \frac{4}{\omega}\sin 2\omega - \frac{2}{\omega}\sin\omega - 2\left(\frac{2\sin 2\omega}{\omega} - \frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos 2\omega}{\omega^2} - \frac{\cos\omega}{\omega^2}\right) \\
&= \frac{2}{\omega^2}(\cos\omega - \cos 2\omega)\,.
\end{aligned}$$

c) Existiert die FOURIER-Transformierte von f?

Lösung: Nein, natürlich nicht: Da $2-|t|$ für $t \to \pm\infty$ nicht einmal beschränkt ist, muß das FOURIER-Integral divergieren.

Aufgabe 3: *(6 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 50x(t) = 250\cos 10t \quad \text{mit} \quad x(0) = 5 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = -10 \quad !$$

Lösung: Wir beginnen mit der homogenen Gleichung

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 50x(t) = 0\,.$$

Das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 10\lambda + 50$ hat die beiden Nullstellen $-5 \pm 5i$; die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist also

$$x(t) = e^{-5t}(a\cos 5t + b\sin 5t)\,.$$

Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$x(t) = \alpha\cos 10t + \beta\sin 10t$$

mit

$$\dot{x}(t) = -10\alpha\sin 10t + 10\beta\cos 10t \quad \text{und} \quad \ddot{x}(t) = -100\alpha\cos 10t - 100\beta\sin 10t\,.$$

Dies ist genau dann eine Lösung, wenn

$$-100\alpha + 100\beta + 50\alpha = 100\beta - 50\alpha = 250 \quad \text{und} \quad -100\beta - 100\alpha + 50\beta = -50\beta - 100\alpha = 0$$

ist. Also ist $\beta = -2\alpha$ und $-200\alpha - 50\alpha = 250$, d.h. $\alpha = -1$ und $\beta = 2$. Die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist also

$$x(t) = -\cos 10t + 2\sin 10t\,,$$

und die allgemeine Lösung ist somit

$$x(t) = -\cos 10t + 2\sin 10t + e^{-5t}(a\cos 5t + b\sin 5t)\,.$$

An der Stelle null nimmt sie den Wert $a-1$ ein, so daß $a = 6$ sein muß. Ihre Ableitung

$$\dot{x}(t) = 10\sin t + 20\cos t + e^{-5t}(-5a\sin 5t + 5b\cos t) - 5e^{-5t}(a\cos 5t + b\sin 5t)$$

ist dort gleich $20 + 5b - 5a = -10 + 5b$, d.h. $b = 0$. Die gesuchte Lösung ist also

$$x(t) = -\cos 10t + 2\sin 10t + 6e^{-5t}\cos 5t\,.$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie e^{At} für $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Der einzige Nichtdiagonaleintrag von A steht in der ersten Zeile und dritten Spalte. Da der erste und der dritte Diagonaleintrag gleich sind, kommutieren daher (im Gegensatz zur Hauptklausur) hier der Diagonalanteil der Matrix und der Rest. Somit ist

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{\begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 3t & 0 \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}} \cdot e^{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 2te^{-t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

denn bei der zweiten Matrix ist bereits das Quadrat gleich der Nullmatrix.

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $x(t), y(t), z(t)$, die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2z(t) - x(t)\,, \qquad & x(0) &= a \\ \dot{y}(t) &= 3y(t)\,, & y(0) &= b \\ \dot{z}(t) &= -z(t)\,, & z(0) &= c \end{aligned}$$

lösen!

Lösung: Es gibt für jedes Tripel von Anfangswerten genau ein Tripel von Lösungsfunktionen; diese bilden zusammen den Vektor $e^{At}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Also ist

$$\begin{aligned} x(t) &= ae^{-t} + 2cte^{-t} \\ y(t) &= be^{3t} \qquad\qquad \text{und} \\ z(t) &= ce^{-t}\,. \end{aligned}$$

c) Welche Bedingungen müssen die reellen Zahlen a, b, c erfüllen, damit diese Lösungen für $t \to \infty$ beschränkt bleiben?

Lösung: Da e^{-t} und te^{-t} für $t \to \infty$ beide gegen null gehen, e^{3t} aber gegen ∞, muß $b = 0$ sein.

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = xe^x + y^2e^{-x}$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: Eine notwendige Bedingung ist das simultane Verschwinden von

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x + xe^x - y^2e^{-x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2ye^{-x} .$$

Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, geht das bei der Ableitung nach y nur, wenn $y = 0$ ist. Alsdann muß $x = -1$ sein. Die HESSE-Matrix an der Stelle $(-1, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^x + xe^x + y^2e^{-x} & -2ye^{-x} \\ -2ye^{-x} & 2e^{-x} \end{pmatrix}(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e \end{pmatrix} .$$

Dies ist eine Diagonalmatrix mit zwei positiven Einträgen, also positiv definit; der Punkt $(-1, 0)$ ist daher ein Minimum.

b) Gibt es absolute Maxima oder Minima?

Lösung: Ein absolutes Maxima kann es offensichtlich nicht geben, da bereits $f(x, 0) = xe^x$ über alle Grenzen wächst. Nach unten ist die Funktion allerdings beschränkt, denn der Summand y^2e^{-x} wird nie negativ und xe^x ist für $x < 0$ zwar negativ, hat aber für $x \to -\infty$ den Grenzwert 0, der gleichzeitig der Wert an der Stelle $x = 0$ ist. Da xe^x stetig ist, muß die Funktion daher auf der negativen reellen Achse beschränkt sein und mindestens ein Minimum haben, das gleichzeitig ein relatives Minimum von f ist. Da es davon nur eines gibt, ist das oben bestimmte Minumum absolutes Minimum von f.

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 24 000 DM maximal gefertigt werden?

Lösung: Da die Funktion

$$f(x, y, z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$$

bei zwei festgehaltenen Variablen eine monoton wachsende Funktion der dritten ist, wird das Maximum beim Einsatz von genau 24 000 DM erreicht, die Nebenbedingung ist also

$$g(x, y, z) = 80x + 12y + 10z - 24\,000 = 0 .$$

Weiter wird das Maximum sicherlich nicht in einem Punkt angenommen, in dem eine der drei Variablen verschwindet, denn dort hat f den Wert null; wir können also beliebig durch x, y, z dividieren.

Der konstante Vektor grad g ist nicht der Nullvektor; im Maximum muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, so daß

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}$$

ist. Also ist dort

$$\lambda = \frac{x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5}}{4} = \frac{5x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}}{6} = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} .$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $12x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ erhalten wir

$$3yz = 10xz = 12xy .$$

Daraus folgt, daß $y = \frac{10}{3}x$ und $z = 4x$ ist. Einsetzen in die Nebenbedingung führt zu der Gleichung

$$80x + 40x + 40x = 24\,000 \quad \text{oder} \quad x = 150 .$$

Somit ist

$$y = 500 \quad \text{und} \quad z = 600 .$$

Der Maximalwert ist

$$f(150, 500, 600) = 50 \cdot 150^{2/5} \cdot \sqrt[5]{500} \cdot \sqrt[5]{600} \approx 4622{,}01$$

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 DM zu erhöhen?

Lösung: Dazu müssen wir

$$\lambda = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} = 150^{2/5}500^{1/5}600^{-4/5} \approx 0{,}154067$$

berechnen; der entsprechende Grenzpreis ist $1/\lambda \approx 6{,}49068$; es lohnt sich also ab einem Stückpreis von 6,50 DM = 3,32 Euro.

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

Das Vektorfeld $\vec{V}$ habe die Potentialfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto \sin(xyz)$.

a) Geben Sie, falls dies möglich ist, eine von φ verschiedene Potentialfunktion ψ von $\vec{V}$ an!

Lösung: Da Potentiale nur bis auf additive Konstanten bestimmt sind, ist beispielsweise

$$\psi(x, y, z) = \sin(xyz) + 24$$

ein weiteres Potential für $\vec{V}$.

b) Berechnen Sie $\operatorname{div} \vec{V}$ und $\operatorname{rot} \vec{V}$!

Lösung:

$$\operatorname{div} \vec{V} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\sin(xyz) \cdot \left(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2\right)$$

und $\operatorname{rot} \vec{V} = \vec{0}$, da ein Potentialfeld wirbelfrei ist.

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*
Die Kurve γ sei gegeben durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [0, 100\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad\qquad t \mapsto (10\cos 2t, 10\sin 2t, 10t) \end{cases}$$

a) Beschreiben Sie diese Kurve geometrisch (mit Maßangaben)!

Lösung: Ohne die z-Komponente wäre dies ein Kreis mit Radius zehn, so ist es eine Spirale mit Radius zehn. Da $\sin 2t$ und $\cos 2t$ Periode π haben, hat sie 100 Windungen; sie steigt bei jeder Windung um 10π an.

b) Was ist die Bogenlänge von γ?

Lösung: Die Bogenlänge ist

$$\int_0^{100\pi} |\dot{\gamma}(t)|\ dt = \int_0^{100\pi} \left| \begin{pmatrix} -20\sin 2t \\ 20\cos 2t \\ 10 \end{pmatrix} \right| dt = \int_0^{100\pi} \sqrt{400\sin^2 2t + 400\cos^2 2t + 100\,dt}$$

$$= \int_0^{100\pi} \sqrt{500}\,dt = \sqrt{5}\cdot 10\cdot 100\pi = 1000\sqrt{5}\pi \approx 7024{,}814731072639\,.$$