Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

24. März 2000

Nachklausur und 17. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Für eine invertierbare Matrix A ist $e^{A^{-1}} = \left(e^A\right)^{-1}$.

2) Finden Sie eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x}(t) = -1/\sin\big(x(t)\big)$ mit $x(0) = \pi/2$!

3) Die Niveaulinien von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien allesamt Geraden parallel zur x-Achse. Was können Sie über f sagen?

4) Wie viele und welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2, \quad \dot{y}(t) = x(t)\cdot\big(y(t)^2 - 4\big)\ ?$$

5) *Richtig oder falsch:* Das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} y/(x^2+y^2) \\ x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}$ hat eine Stammfunktion.

6) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 3, \pm 3)$. Was ist $\iint_Q y\,dx\,dy$?

7) *Richtig oder falsch:* Die Standardabweichung einer Meßreihe wird kleiner, wenn man die Anzahl der Messungen erhöht.

Aufgabe 1: (*6 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktion $f(t) = |\sin t|$ im Intervall $[-2\pi, 2\pi]$!

b) Welche Periode hat f ?

c) Berechnen Sie die Fourier-Reihe von f !

Aufgabe 2: (*7 Punkte)*

a) Skizzieren Sie die Funktionen $f(t) = 2 - |t|$ und

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(t) > 1 \\ 0 & \text{falls } f(t) < 0 \\ f(t) & \text{sonst} \end{cases}\ !$$

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von g ! (*Hinweis:* Sie sparen viel Arbeit, wenn Sie Symmetrie ausnutzen!)

c) Existiert die Fourier-Transformierte von f ?

Aufgabe 3: (*6 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) + 10\dot{x}(t) + 50x(t) = 250\cos 10t \quad \text{mit} \quad x(0) = 5 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) = -10 \quad !$$

• • • **BITTE WENDEN!** • • •

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie e^{At} für $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$!

b) Bestimmen Sie alle Funktionen $x(t), y(t), z(t)$, die das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 2z(t) - x(t)\,, & x(0) &= a \\ \dot{y}(t) &= 3y(t)\,, & y(0) &= b \\ \dot{z}(t) &= -z(t)\,, & z(0) &= c \end{aligned}$$

lösen!

c) Welche Bedingungen müssen die reellen Zahlen a, b, c erfüllen, damit diese Lösungen für $t \to \infty$ beschränkt bleiben?

Aufgabe 5: *(5 Punkte)*

a) Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der Funktion $f(x, y) = xe^x + y^2e^{-x}$ auf $\mathbb{R}^2$!

b) Gibt es absolute Maxima oder Minima?

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 24 000 DM maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 DM zu erhöhen?

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*

Das Vektorfeld $\vec{V}$ habe die Potentialfunktion $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};\ (x, y, z) \mapsto \sin(xyz)$.

a) Geben Sie, falls dies möglich ist, eine von φ verschiedene Potentialfunktion ψ von $\vec{V}$ an!

b) Berechnen Sie $\operatorname{div}\vec{V}$ und $\operatorname{rot}\vec{V}$!

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*

Die Kurve γ sei gegeben durch

$$\gamma\colon \begin{cases} [0, 100\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \qquad t \mapsto (10\cos 2t, 10\sin 2t, 10t) \end{cases}$$

a) Beschreiben Sie diese Kurve geometrisch (mit Maßangaben)!

b) Was ist die Bogenlänge von γ?

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Freitag, dem 24. März 2000, um 13.00 Uhr