Wolfgang K. Seiler D7,27, Zimmer 401
Tel. 2515

17. Februar 2000

16. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ kann als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche dargestellt werden.

2) Richtig oder falsch: Das Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \binom{y/(x^2+y^2)}{-x/(x^2+y^2)}$ hat eine Stammfunktion.

3) Richtig oder falsch: $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| + |y| \geq 1\right\}$ ist einfach zusammenhängend.

4) Richtig oder falsch: Die Oberfläche eines Torus ist einfach zusammenhängend.

5) Richtig oder falsch: Das Möbiusband ist einfach zusammenhängend.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie für den Bereich $B \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \leq 1\right\}$ die folgenden Integrale:

a) $\iint\limits_B x \, dx\, dy$ *b)* $\iint\limits_B xy \, dx\, dy$ *c)* $\iint\limits_B \sqrt{1 - x^2 - 4y^2} \, dx\, dy$ *d)* $\iint\limits_B \sqrt{x^2 + 4y^2} \, dx\, dy$

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Das Flächenstück f sei definiert als $f\colon [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto (u^2, 2uv, v^2)$.

a) Ist das ein reguläres Flächenstück?

b) Berechnen Sie die Fundamentalgrößen E, F, G dieses Flächenstücks!

b) Berechnen Sie seinen Flächeninhalt!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Das Möbiusband kann als Flächenstück B dargestellt werden durch

$$f\colon D = [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u,v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + u\cos v)\, \cos 2v \\ (2 + u\cos v)\, \sin 2v \\ u \sin v \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Randkurve γ von B !

b) Berechnen Sie für $\vec{V}(x,y,z) = \dfrac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ das Integral $\int_\gamma \vec{V}\, d\vec{s}$!

c) Berechnen Sie $\iint_B \operatorname{rot} \vec{V}\, d\vec{O} = \iint_D \operatorname{rot} \vec{V} \cdot (f_u \times f_v)\, du\, dv$!

d) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus *b)* und *c)* mit der Aussage des Satzes von Stokes!

KEINE ABGABE — FROHE FERIEN !