Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

D7,27, Zimmer 401

12. Februar 2000

Klausur und 15. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Differentialgleichung $\dot{y}(t) = y(t)$ hat genau die Funktion $y = e^t$ als Lösung.

2) Bestimmen Sie alle differenzierbaren Funktionen $y(t)$ mit $\dot{y}(t)^2 = 4$ und $y(1) = 2$!

3) *Richtig oder falsch:* Für zwei diagonalisierbare Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $e^{AB} = e^A \cdot e^B$.

4) Welche Gleichgewichtslösungen hat das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x}(t) = x(t)^2 - y(t)^2, \quad \dot{y}(t) = \sin x(t)\ ?$$

5) *Richtig oder falsch:* Falls für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ die Funktion $f(0, y)$ ein Maxiumum bei $y = 0$ hat und $f(x, 0)$ ein Minimum bei $x = 0$, ist der Nullpunkt ein Sattelpunkt von f.

6) *Richtig oder falsch:* Die Gleichung $x \sin y = y \sin x$ kann in einer Umgebung von (π, π) nach y aufgelöst werden.

Aufgabe 1: (*7 Punkte)*

Gegeben seien die Funktionen $f_n\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \cos\frac{t}{2} & \text{falls } |t| < (2n-1)\pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}.$

a) Skizzieren Sie die Funktion f_2!

b) Berechnen Sie die Fourier-Transformierte von f_n!

c) Wie verhält sich diese für $n \to \infty$?

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) + x(t) = 10\cos 3t + 5\cos 2t$ mit $x(0) = 2$!

Aufgabe 3: (*8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) - z(t) \\ \dot{y}(t) &= -y(t) + z(t)\ ! \\ \dot{z}(t) &= \ \ 2z(t) \end{aligned}$$

b) Welche Lösung genügt den Anfangsbedingungen $x(0) = 1$, $y(0) = -1$ und $z(0) = -3$?

c) Wie müssen die Anfangsbedingungen gewählt werden, damit die Lösung für $t \to \infty$ beschränkt bleibt?

• • • BITTE WENDEN! • • •

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x^{(4)}(t) + 4x^{(3)}(t) + 6\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + x(t) = \sin t$$

mit

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = -25, \quad \ddot{x}(0) = 8 \quad \text{und} \quad x^{(3)}(0) = 0\,!$$

Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Aufgabe 5: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie alle lokalen Minima, Maxima und Sattelpunkte der Funktion

$$f(x,y) = y^3 - 3x^2y + 9x^2 + 12x\,!$$

Aufgabe 6: *(6 Punkte)*

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 10 DM, 5 DM *bzw.* 20 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $40\sqrt{x}\,\sqrt[4]{y}\,\sqrt[4]{z}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 50 000 DM maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 50 000 DM zu erhöhen?

Aufgabe 7: *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{V} = \begin{pmatrix} axy \\ byz \\ cxz \end{pmatrix}$ die Divergenz von $\vec{V}$ und die Divergenz der Rotation von $\vec{V}$!

Aufgabe 8: *(5 Punkte)*

a) Ein Massenpunkt läuft im ebenen Kraftfeld $\vec{F}(\boldsymbol{x}) = \binom{-y}{x}$ auf einem der beiden Bogen des Einheitskreises von $(0,1)$ nach $(0,-1)$. Berechnen Sie die Arbeit $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\boldsymbol{x}$ für die beiden Fälle!

b) Ist das Kraftfeld aus *a)* konservativ?

Abgabe bis zum Samstag, dem 12. Februar 2000, um 13.00 Uhr