WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

27. Januar 2000

13. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Für ein Vektorfeld $\vec{V}$ auf $\mathbb{R}^3$ steht $\operatorname{rot}\vec{V}(x,y,z)$ in jedem Punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ senkrecht auf dem Ortsvektor ${}^t(x,y,z)$.

2) *Richtig oder falsch:* Im Punkt $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ steht $\operatorname{rot}\vec{V}(x,y,z)$ senkrecht auf $\vec{V}(x,y,z)$.

3) *Richtig oder falsch:* Für eine um den Nullpunkt kugelsymmetrische Funktion $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sind die Vektoren $\operatorname{grad} f(x,y,z)$ und ${}^t(x,y,z)$ in jedem Punkt linear abhängig.

4) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ hänge, in Zylinderkoordinaten geschrieben, nur von der Winkelkoordinate φ ab. Was können Sie über die Niveauflächen von f sagen?

5) *ditto* für ein nur von r und z abhängiges f.

6) Die Funktion $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ hänge, in Kugelkoordinaten geschrieben, nur von den Winkelkoordinaten φ und ϑ ab. Wie sehen jetzt die Niveauflächen aus?

7) *ditto* für ein nur von r abhängiges f.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Drücken Sie die Funktion $f(x,y)=y^2-x^2+\dfrac{4x^2y^2}{x^2+y^2}$ in Polarkoordinaten aus!

b) Zeigen Sie, daß jedes Extremum von f auf der Kreisscheibe $x^2+y^2\le R^2$ auf dem Rand angenommen wird und bestimmen Sie alle Extrema!

c) Bestimmen Sie durch Übergang zu Kugelkoordinaten die Extrema von $f(x,y,z)=xyz$ auf der Vollkugel $x^2+y^2+z^2\le 1$! (*Hinweis:* $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin(2\alpha)$)

Aufgabe 2: (*4 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei Vektorfelder $\vec{V},\vec{W}\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ die Divergenz von $\vec{V}\times\vec{W}$ auf möglichst kompakte Weise!

b) Das Spatprodukt $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ dreier Vektoren ist bis auf das Vorzeichen unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; insbesondere ist $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=-\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$. Wenden Sie diese Formel an auf die „Vektoren“ $\vec{a}=\nabla,\vec{b}=\vec{V}$ und $\vec{c}=\vec{W}$, und vergleichen Sie mit *a)* !

Aufgabe 3: (*4 Punkte)*

Das Potential eines (statischen) elektrischen Dipols mit Dipolmoment $\vec{p}$ ist gegeben durch

$$U(x,y,z)=\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{x}|^3},\quad\text{wobei}\quad \vec{x}={}^t(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\smallsetminus\{\vec{0}\}.$$

a) Berechnen Sie sein elektrisches Feld $\vec{E}=-\operatorname{grad}U$!

b) Berechnen Sie Divergenz und Rotation von $\vec{E}$!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 3. Februar 2000, um 14.15 Uhr