WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

20. Januar 2000

12. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Charakterisieren Sie jene Punkte des $\mathbb{R}^3$, in denen $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ ein Minimum unter der Nebenbedingung $5x + 6y + 7z = 10$ annimmt, geometrisch!

2) Richtig oder falsch: Für die Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ sei die JACOBI-Matrix identisch Null. Dann gibt es einen Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, so daß $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

3) Richtig oder falsch: Falls alle zweiten partiellen Ableitungen von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren und stetig sind, ist die JACOBI-Matrix symmetrisch.

4) Richtig oder falsch: Ist $\operatorname{div} f = 0$, ist die JACOBI-Matrix antisymmetrisch.

5) Richtig oder falsch: Ist $\operatorname{rot} f = \vec{0}$, ist die JACOBI-Matrix symmetrisch.

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Ein Produkt werde aus drei Resourcen hergestellt, die jeweils 80 DM, 12 DM *bzw.* 10 DM pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können für 24 000 DM maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 DM zu erhöhen?

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Die Quadrik $Q \subset \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch die Gleichung

$$(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\,,$$

wobei die Determinante der symmetrischen 2×2-Matrix A von Null verschieden sei. Bestimmen Sie jene Punkte der Quadrik, in denen der Abstand zum Punkt $(0,0)$ ein relatives Minimum annimmt! Lassen sich diese Punkte auch geometrisch interpretieren?

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Zeigen Sie: Für eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ und ein Vektorfeld $V \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R}^3)$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^3$ gilt:

a) $\operatorname{div}(fV) = (\operatorname{grad} f) \cdot V + f \operatorname{div} V$

b) $\operatorname{rot}(fV) = (\operatorname{grad} f) \times V + f \operatorname{rot} V$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} V) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} V) - {}^t(\Delta V, \Delta V, \Delta V)$

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 27. Januar 2000, um 14.15 Uhr