WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

23. Dezember 1999

10. Übungsblatt Höhere Mathematik II

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Die Niveaulinien der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zum Wert a seien die Kreise $x^2 + y^2 = a^3$. Was ist f?

2) Der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit Koordinaten x, y in $\mathbb{R}^2$ und z in $\mathbb{R}$ sei die durch $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ und $z \geq 0$ gegebene Halbkugel Was ist f?

3) Finden Sie eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die im Punkt $(0, 0)$ differenzierbar, aber nicht zweimal differenzierbar ist!

4) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ hat genau dann ein lokales Maximum im Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, wenn die beiden Funktionen $g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(t) = f(t, y_0)$ *bzw* $h(t) = f(x_0, t)$ Maxima bei $t = x_0$ *bzw.* $t = y_0$ haben.

5) Was ist das Bild des Graphen der Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ unter der Projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $(x, y, z) \mapsto (x, y)$?

Aufgabe 1: **(***5 Punkte)*
Zeigen Sie:

a) Für zwei differenzierbare Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\,!$$

b) Die partielle Ableitung f_{xy} von $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ verschwindet genau dann überall, wenn es Funktionen $g, h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gibt, so daß $f(x, y) = g(x) + h(y)$ ist.

Aufgabe 2: **(***5 Punkte)*
Betrachten Sie die Funktion $f(x, y, z) = x \cdot e^{xy/z}$.

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}^3$ für f.

b) Berechnen Sie dort die Ableitung von f!

c) Berechnen Sie die HESSE-Matrix von f!

Aufgabe 3: **(***5 Punkte)*
Bestimmen Sie alle (lokalen) Maxima und Minima sowie die Sattelpunkte der Funktion $f(x, y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$ in $\mathbb{R}^2$!

FROHE WEIHNACHTEN UND
EIN GUTES NEUES JAHRTAUSEND!

Abgabe bis zum Donnerstag, dem 13. Januar 2000, um 14.15 Uhr