Wolfgang K. Seiler
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

11. Juni 1999

9. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Wenn alle Eigenwerte der $n \times n$-Matrix A gleich eins sind, ist A die Einheitsmatrix.

2) *Richtig oder falsch:* Jede reelle 3×3-Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

3) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Was ist $\det A$?

4) *Richtig oder falsch:* Die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist genau dann injektiv, wenn keiner ihrer Eigenwerte gleich Null ist.

5) *Richtig oder falsch:* Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt es n linear unabhängige Hauptvektoren.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die komplexen Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$!

b) Bezüglich welcher Basis von $\mathbb{C}^2$ hat A welche Diagonalgestalt?

c) Auf $V = [\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t] \le \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sei die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(f) = \frac{d^2 f}{dt^2}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von φ!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*
Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
Ein starrer Körper bewege sich mit Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um seinen Massenmittelpunkt; der Drehimpuls ist dann bekanntlich gleich $J \cdot \vec{\omega}$ mit $J =$ Trägheitstensor.

a) Zeigen Sie unter der (physikalisch sinnvollen) Annahme, daß die 3×3-Matrix J drei positive reelle Eigenwerte hat, daß der Drehimpuls bei (betragsmäßig) konstanter Winkelgeschwindigkeit genau dann (betragsmäßig) maximal *bzw.* minimal wird, wenn ω ein Eigenvektor zum größten *bzw.* kleinsten Eigenwert von J ist.

b) Das von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelepiped hat den Trägheitstensor

$$J = \begin{pmatrix} 40 & -2 & 0 \\ -2 & 37 & 0 \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix} \quad \text{bei Massendichte} \quad \rho = \frac{1}{16}\,.$$

Bestimmen Sie die Achsen für den maximalen und den minimalen Drehimpuls!

Abgabe bis zum Freitag, dem 18. Juni 1999 um 12.00 Uhr