Wolfgang K. Seiler
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

4. Juni 1999

8. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Für die Matrix $A \in k^{n\times n}$ sei $A^3 = A$. Dann ist $\det A = 0$ oder $\det A = \pm 1$.

2) Berechnen Sie die Determinante der 10×10-Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 10i + j$.

3) *Richtig oder falsch:* V sei ein endlichdimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ sei linear. Falls $\det\varphi$ verschwindet, ist φ nicht surjektiv.

4) *Richtig oder falsch:* Zur Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sei die Matrix $A_\pi \in \mathbb{R}^{n\times n}$ erklärt wie in Aufgabe 2 des vorigen Übungsblatts. Dann ist $\det A_\pi = \varepsilon(\pi)$.

5) $V \le \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sei aufgespannt von den Funktionen $\sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \sin 3t, \cos 3t$, und $\varphi\colon V \to V$ sei die Abbildung $f \mapsto f''$. Berechnen Sie die Determinante von φ!

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die Determinante der vom vierten Übungsblatt her bekannten Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}.$$

b) V sei ein k-Vektorraum mit Basis $\{\vec b_1, \dots, \vec b_n\}$, und $\varphi\colon V \to V$ bilde $\vec b_i$ ab auf $\sum_{j=1}^{i} j\vec b_j$. Was ist $\det\varphi$?

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*

A sei eine $n \times n$-Matrix mit lauter ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie:

a) Falls $\det A = \pm 1$ ist, hat jedes lineare Gleichungssystem $A\vec x = \vec b$ mit ganzzahliger rechter Seite $\vec b \in \mathbb{Z}^n$ eine eindeutig bestimmte ganzzahlige Lösung $\vec x \in \mathbb{Z}^n$.

b) Falls $\det A = \pm 1$ ist, hat auch A^{-1} lauter ganzzahlige Einträge.

c) Falls A^{-1} lauter ganzzahlige Einträge hat, ist $\det A = \pm 1$.

Abgabe bis zum Freitag, dem 11. Juni 1999 um 12.00 Uhr