Wolfgang K. Seiler
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

28. Mai 1999

7. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Für vier paarweise verschiedene Zahlen i, j, k, ℓ sind die Transpositionen $(i\,j)$ und $(k\,\ell)$ vertauschbar.

2) Was ist die inverse Permutation zu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$?

3) *Richtig oder falsch:* Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

4) *Richtig oder falsch:* Jede Permutation von n Elementen läßt sich als Produkt von höchstens n Transpositionen schreiben.

5) *Richtig oder falsch:* Die Determinante einer Permutationsmatrix ist Eins.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Produkt $\pi_1 \circ \pi_2$ der beiden Permutationen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} \text{ und } \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}\ !$$

b) Schreiben Sie die Permutation π_1 als Produkt von Transpositionen!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

Zu jeder Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch die Vorschrift $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{e}_{\pi(i)}$, wobei $\vec{e}_i$ den i-ten Einheitsvektor des $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_\pi = (a_{ij})$ von π!

b) Zeigen Sie: Für zwei Permutationen $\pi, \rho \in \mathfrak{S}_n$ ist $A_{\pi\circ\rho} = A_\pi \cdot A_\rho$.

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear abhängig sind!

Abgabe bis zum Freitag, dem 4. Juni 1999 um 12.00 Uhr