WOLFGANG K. SEILER
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

21. Mai 1999

6. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Π_2 sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad ≤ 2. Dann ist die Abbildung $\varphi\colon \Pi_2 \to \mathbb{R}^3; P \mapsto \big(P(1), P(2), P(3)\big)$ ein Isomorphismus.

2) *Richtig oder falsch:* Mit $U_a = \big\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \bigm| f(0) = a \big\}$ ist (U_2, U_0) ein affiner Raum.

3) *Richtig oder falsch:* Drei Punkte P, Q, R aus dem affinen Raum $\mathbb{R}^3$ spannen genau dann eine Ebene auf, wenn $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR} \neq \vec{0}$ ist.

4) *Richtig oder falsch:* Die Menge aller affiner Abbildungen zwischen zwei affinen Räumen ist selbst ein affiner Raum.

5) Finden Sie eine Gerade und eine Ebene im $\mathbb{R}^4$, die zusammen ganz $\mathbb{R}^4$ aufspannen!

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Der affine Unterraum B des $\mathbb{R}^5$ sei gegeben durch das lineare Gleichungssystem $u + x = 1$, $u + y = 0$ und $u + v + w + x + y = 1$. Bestimmen Sie die Menge B explizit! Welche Dimension hat B ?

b) Berechnen Sie den Durchschnitt von B mit $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5\\4\\3\\2\\1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$!

c) Welche Dimension hat der von A und B aufgespannte affine Unterraum von $\mathbb{R}^5$?

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

$A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2, c_3)$ seien drei Punkte des affinen Raums $\mathbb{R}^3$, die nicht auf einer Gerade liegen.

a) Zeigen Sie: $P \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann in der von A, B, C aufgespannten Ebenen, wenn das Spatprodukt $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AP}$ verschwindet!

b) Bestimmen Sie daraus explizit ein lineares Gleichungssystem, das die von den drei Punkten $(1, 0, 1)$, $(-2, 2, 1)$ und $(1, 5, -2)$ aufgespannte Ebene als Lösungsmenge hat!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Der Würfel mit Ecken $(\pm 5, \pm 5, \pm 5)$ soll durch die affine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

nach $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

a) Zeichnen Sie das Bild des Würfels!

b) Welches ist das kleinste achsenparallele Rechteck in $\mathbb{R}^2$, das dieses Bild enthält?

c) Modifizieren Sie φ durch Verschiebung und Streckung oder Stauchung im $\mathbb{R}^2$ so, daß das Bild des Würfels das Einheitsquadrat möglichst gut ausfüllt!

Abgabe bis zum Freitag, dem 28. Mai 1999 um 12.00 Uhr

Lösung von Aufgabe 3a) des 4. Übungsblatts

Hier ist eine Lösung, die ohne Begriffe wie Kern *und* Bild *auskommt; sie schließt außerdem eine Lücke, die ich am letztten Freitag versehentlich beim Vorrechnen gelassen habe:*

$\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ sei eine Basis von V; da φ linear ist, wird $\varphi(V)$ dann aufgespannt von den Vektoren $\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)$, d.h.

$$\varphi(V) = [\varphi(\vec{v}_1), \dots, \varphi(\vec{v}_n)]$$

ist ein Untervektorraum von V.

$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j\}$ sei eine Basis dieses Untervektorraums; nach dem Basisergänzungssatz kann sie ergänzt werden zu einer Basis

$$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j, \vec{c}_{j+1}, \dots, \vec{c}_n\}$$

von ganz V. Da $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_j$ Bildvektoren sind, gibt es Urbilder $\vec{u}_i$, so daß $\varphi(\vec{u}_i) = \vec{b}_i$ ist, also ist

$$\varphi(\vec{b}_i) = \varphi\big(\varphi(\vec{u}_i)\big) = \varphi(\vec{u}_i) = \vec{b}_i\,,$$

wie gewünscht. Über die Bilder der $\vec{c}_i$ ist nichts bekannt, nur daß $\varphi\big(\varphi(\vec{c}_i)\big) = \varphi(\vec{c}_i)$ ist. Daraus folgt, daß

$$\varphi\big(c_i - \varphi(\vec{c}_i)\big) = \varphi(\vec{c}_i) - \varphi\big(\varphi(\vec{c}_i)\big) = \vec{0}$$

ist. Mit

$$\vec{b}_i \underset{\text{def}}{=} \vec{c}_i - \varphi(\vec{c}_i) \quad \text{für } i = j+1, \dots, n$$

ist daher

$$\varphi(\vec{b}_i) = \begin{cases} \vec{b}_i & \text{für } i = 1, \dots, j \\ \vec{0} & \text{für } i = j+1, \dots, n \end{cases},$$

wie gewünscht. Damit ist die Aufgabe gelöst, falls $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von V ist. Da die Menge aus n Elementen besteht und n auch die Dimension von V ist, genügt es, die lineare Unabhängigkeit der $\vec{b}_i$ zu zeigen.

Sei also

$$\lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n = \vec{0}$$

eine Darstellung des Nullvektors. Anwendung von φ auf beide Seiten liefert

$$\varphi(\lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n) = \lambda_1\varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{b}_n) = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_j\vec{b}_j = 0\,,$$

denn $\varphi(\vec{b}_i) = \vec{0}$ für $i > j$. Da $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j\}$ als Basis eines Untervektorraums linear unabhängig ist, müssen λ_1 bis λ_j verschwinden. Übrig bleibt die Beziehung

$$\lambda_{j+1}\vec{b}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n = \lambda_{j+1}\big(\vec{c}_{j+1} - \varphi(\vec{c}_{j+1})\big) + \cdots + \lambda_n\big(\vec{c}_n - \varphi(\vec{c}_n)\big) = \vec{0}$$

oder

$$\lambda_{j+1}\vec{c}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\vec{c}_n - \varphi(\lambda_{j+1}\vec{c}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\vec{c}_n) = \vec{0}\,.$$

Der letzte Summand ist ein Bildvektor und läßt sich daher als Linearkombination von $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_j$ schreiben; dies führt zu einer Relation der Form

$$\lambda_{j+1}\vec{c}_{j+1} + \cdots + \lambda_n\vec{c}_n + \mu_1\vec{b}_1 + \cdots + \mu_j\vec{b}_j = \vec{0}\,.$$

Hier müssen alle Koeffizienten verschwinden, speziell auch λ_{j+1} bis λ_n, denn nach Konstruktion ist $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_j, \vec{c}_{j+1}, \dots, \vec{c}_n\}$ eine Basis von V und somit insbesondere linear unabhängig. Also sind $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_n$ linear unabhängig, und damit ist alles gezeigt.