WOLFGANG K. SEILER
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

14. Mai 1999

5. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* V und W seien Vektorräume über dem Körper k. Dann ist auch die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller linearer Abbildungen von V nach W ein k-Vektorraum.

2) Finden Sie eine Basis für den Vektorraum $k^{n\times m}$ aller $n \times m$-Matrizen!

3) *Richtig oder falsch:* V sei ein endlichdimensionaler k-Vektorraum. Dann ist jede injektive lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ auch surjektiv.

4) *Richtig oder falsch:* Der Kern der linearen Abbildung $\varphi: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto f'$ ist eindimensional.

5) *Richtig oder falsch:* $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ seien zwei Basen des endlichdimensionalen Vektorraums V, und $\varphi: V \to V$ sei eine lineare Abbildung. Die Abbildungsmatrix von φ bezüglich $\mathcal{B}$ ist genau dann invertierbar, wenn es die bezüglich $\mathcal{C}$ ist.

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*
$V_n = \left\{ a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R} \right\}$ sei der Vektorraum aller reeller Polynome vom Grad höchstens n.

a) Finden Sie eine Basis von V_n!

b) Bestimmen Sie Basen von Kern und Bild der linearen Abbildung

$$\varphi_n: V_n \to V_{n+1};\ f \mapsto \int_0^X f(\xi)\, d\xi\,!$$

c) Welche Abbildungsmatrix hat φ_3 bezüglich der Basen aus *a)*?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie Kern und Bild der linearen Abbildung mit Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 3: *(5 Punkte)*
V sei der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller stetiger Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie eine Basis des Untervektorraums

$$U = [1, \sin t, \cos t, \sin^2 t, \cos^2 t, e^{2it}, e^{it}, e^{-it}, e^{-2it}] \le V\,!$$

b) Gibt es eine Basis aus reelwertigen Funktionen?

c) Zeigen Sie, daß die Differentiation nach t eine lineare Abbildung von U nach U definiert, und bestimmen Sie deren Kern und Bild!

Abgabe bis zum Freitag, dem 21. Mai 1999 um 12.00 Uhr