Wolfgang K. Seiler
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

7. Mai 1999

4. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Hat die Matrix $A \in k^{n\times n}$ den Rang n, so ist für jedes $B \in k^{n\times m}$ die Matrixgleichung $AX = B$ eindeutig lösbar.

2) Richtig oder falsch: Jede Permutationsmatrix ist zu sich selbst invers.

3) Richtig oder falsch: Jede einelementige Teilmenge eines Vektorraums ist linear unabhängig.

4) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R};\ f \mapsto \int_0^1 f(t)\,dt$ ist linear.

5) Richtig oder falsch: Die Abbildung $\psi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R};\ z \mapsto |z|$ ist $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe 1: (*4 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge aller reeller Matrizen X, für die gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}\ !$$

Aufgabe 2: (*6 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 2 & 3 & 4 \\ 2-2a & a-6 & -3 & -4 \\ a-1 & 6-2a & a-6 & 0 \\ 0 & (a+1)(a-2) & 9+4a-a^2 & a-8 \end{pmatrix}$$

b) Geben Sie, in Abhängigkeit von a und einer beliebigen rechten Seite, die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ durch möglichst einfache Formeln an!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

a) Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ heißt *Projektion* (auf elektrotechnisch *Filter*), wenn $\varphi \circ \varphi = \varphi$ ist. Zeigen Sie, daß es für einen endlichdimensionalen Vektorraum V und eine Projektion $\varphi\colon V \to V$ eine Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ von V und ein $j \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\varphi(\vec{b}_i) = \vec{0}$ ist für $i > j$ und $\varphi(\vec{b}_i) = \vec{b}_i$ für $i \le j$.

b) Für die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \vec{0}, \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix von φ und deren Quadrat!

Abgabe bis zum Freitag, dem 14. Mai 1999 um 12.00 Uhr