WOLFGANG K. SEILER
*Tel. 8847*

D7,27, Zimmer 401

*23. April 1999*

## 2. Übungsblatt Höhere Mathematik I

*1) Richtig oder falsch:* Zu jeder linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gibt es einen Vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, so daß $\varphi(\vec{v}) = \vec{a} \cdot \vec{v}$ ist für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$.

*2) Richtig oder falsch:* Für zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ ist $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$.

*3) Richtig oder falsch:* Falls für drei $2\times 2$-Matrizen $A, B, C$ gilt $AB = AC$, so ist auch $B = C$.

*4) Richtig oder falsch:* Die $3 \times 3$-Matrix $A$ ist mit $B = A^3 + A$ vertauschbar.

*5) Richtig oder falsch:* $k$ sei ein Körper und $\vec{v} \in k^n$ ein Vektor mit der Eigenschaft, daß $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$ ist. Dann ist $\vec{v} = \vec{0}$.

**Aufgabe 1:** (*5 Punkte*)

*a)* Zeigen Sie, daß die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ der Gleichung $A^3 - 4A^2 + 3A = E$ genügt!

*b)* Benutzen Sie das Resultat aus *a)*, um eine Matrix $B$ zu finden, für die $AB = BA = E$ ist!

**Aufgabe 2:** (*5 Punkte*)

Für jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ sei $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & n(2n+1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

*a)* Für positives $n$ ist $A_n = A_1^n$.

*b)* Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ ist $A_n \cdot A_m = A_{n+m}$.

*c)* $A_n \cdot A_{-n} = E$.

**Aufgabe 3:** (*5 Punkte*)

*a)* Bestimmen Sie über $k = \mathbb{Q}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & + & 6x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & & & = & 2\,! \end{array}$$

*b)* Geben Sie eine ganzzahlige Lösung an! *(Hinweis: Es gibt eine mit einstelligen $x_i$.)*

*c)* Gibt es eine Lösung mit natürlichen Zahlen $x_i$?

**Abgabe** bis zum Freitag, dem 30. April 1999 um 12.00 Uhr