WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

22. Oktober 1999

Nachklausur und 14. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls die beiden Vektoren $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{b}_2 \neq \vec{0}$ des $\mathbb{R}^3$ aufeinander senkrecht stehen, ist $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_1 \times \vec{b}_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

Lösung: *Richtig,* denn $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ steht senkrecht sowohl auf $\vec{b}_1$ als auch auf $\vec{b}_2$, und die beiden sind nach Voraussetzung orthogonal.

2) Richtig oder falsch: Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.

Lösung: *Richtig,* denn da rechts nur Nullen stehen, ist das Gleichungssystem erfüllt, wenn alle Variablen auf null gesetzt werden.

3) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sei der Vektorraum aller reeller 2×2-Matrizen. Dann ist die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R};\ A \mapsto \det A$ linear.

Lösung: *Falsch,* denn beispielsweise ist für die Einheitsmatrix E zwar $\det(E + E) = 4$, aber $\det E + \det E = 1 + 1 = 2$.

4) Welche Dimension hat der Vektorraum aller symmetrischer reeller 2×2-Matrizen?

Lösung: Eine symmertrische 2×2-Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, der Vektorraum ist also dreidimensional mit Basis $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

5) Richtig oder falsch: Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gibt es eine Basis des $\mathbb{C}^n$, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine obere Dreiecksmatrix ist.

Lösung: *Richtig,* denn da das charakteristische Polynom der Abbildungsmatrix über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren zerfällt, kann man eine Basis aus Hauptvektoren finden.

6) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}^5$ hat eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Lösung: *Richtig,* denn diese reelle Matrix ist symmetrisch und somit diagonalisierbar.

7) *Richtig oder falsch:* Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto e^{\lambda x}$ Eigenvektor der linearen Abbildung $\varphi: \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R});\ f \mapsto \frac{df}{dx}$.

Lösung: *Richtig,* denn $\varphi(e^{\lambda x}) = \frac{de^{\lambda x}}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$.

8) *Richtig oder falsch:* Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |\sin t|$ enthält nur Sinusterme.

Lösung: *Falsch;* da f eine gerade Funktion ist, gibt es (abgesehen vom konstanten Term) nur Cosinusterme.

Aufgabe 1: (*8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & ax_4 & = & -a \\ & - & 2x_2 & + & (a-1)x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & + & ax_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$

Lösung: Da x_1 in der ersten Gleichung mit Koeffizient eins auftritt, empfiehlt es sich, diese Gleichung zur Elimination von x_1 aus dem restlichen Gleichungssystem zu verwenden; ihre Subtraktion von der zweiten und Addition zur vierten Gleichung ergibt das neue System

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & & & - & (a+2)x_4 & = & -(a+2) \\ & - & 2x_2 & + & (a-1)x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ & & 2x_2 & + & (a-1)x_3 & + & 6x_4 & = & 7 \end{array}$$

Als nächstes wird die zweite Gleichung von der dritten subtrahiert und zur vierten addiert; wir erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ & - & 2x_2 & & & - & (a+2)x_4 & = & -(a+2) \\ & & & & (a-1)x_3 & + & ax_4 & = & a+1 \\ & & & & (a-1)x_3 & + & (4-a)x_4 & = & 5-a \end{array}$$

Um Treppengestalt zu bekommen, müssen wir schließlich noch die dritte Gleichung von der vierten subtrahieren; dies führt zur Gleichung

$$(4-2a)x_4 = (4-2a)\,,$$

in der nur noch x_4 vorkommt.
Für $a \neq 2$ folgt, daß $x_4 = 1$ sein muß; für $a = 2$ stellt diese Gleichung keinerlei Bedingung an x_4.
Betrachten wir zunächst den Fall $a \neq 2$ weiter; dann ist also $x_4 = 1$, und die dritte Gleichung des zuletzt erhaltenen Systems sagt uns, daß

$$(a-1)x_3 + a = a+1 \quad \text{oder} \quad (a-1)x_3 = 1$$

ist. Für $a = 1$ ist dies ein offensichtlicher Widerspruch; dann ist also das gesamte Gleichungssystem unlösbar.
Im folgenden sei daher $a \neq 1$; dann ist

$$x_3 = \frac{1}{a-1}\,.$$

Die zweite Gleichung sagt uns nach Einsetzen von $x_4 = 1$, daß

$$-2x_2 - (a+2) = -(a+2)$$

ist, x_2 muß also verschwinden.
Dies alles eingesetzt in die erste Gleichung ergibt

$$x_1 - \frac{1}{a-1} + 2 = 2 \quad \text{oder} \quad x_1 = \frac{1}{a-1}\,.$$

Damit ist das Gleichungssystem für $a \neq 2$ und $a \neq 1$ gelöst.
Für $a = 2$ ist x_4 beliebig; die dritte Gleichung wird zu

$$x_3 + 2x_4 = 3 \quad \text{oder} \quad x_3 = 3 - 2x_4$$

und die zweite zu

$$-2x_2 - 4x_4 = -4 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2 - 2x_4\,.$$

Einsetzen in die erste Gleichung zeigt, daß $x_1 = 1$ sein muß.
Die Lösungsmenge des Gleichungssystems ist daher

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a = 1 \\ \left\{\left(\frac{1}{a-1}, 0, \frac{1}{a-1}, 1\right)\right\} & \text{für } a \neq 1, 2 \\ \left\{(1, 2-2\lambda, 3-2\lambda, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\} & \text{für } a = 2\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2: (*4 Punkte*)
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon V \to V;\ f \mapsto f''$ linear ist!

Lösung:

$$\varphi(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'' = \lambda f'' + \mu g'' = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$$

b) Bestimmen Sie eine Basis von V und die Abbildungsmatrix von φ bezüglich dieser Basis!

Lösung: Die Polynome X^3, X^2, X und 1 bilden eine Basis. Wegen

$$\varphi(X^3) = \frac{d^2X^3}{dX^2} = 6X, \quad \varphi(X^2) = \frac{d^2X^2}{dX^2} = 2 \quad \text{und} \quad \varphi(X) = \varphi(1) = 0$$

ist die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis gleich

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Geben Sie Basen für Kern und Bild von φ an!

Lösung: Ein Polynom hat genau dann das Nullpolynom als zweite Ableitung, wenn es linear ist; der Kern wird also aufgespannt von $\{1, X\}$. Die zweite Ableitung eine Polynoms vom Grad höchstens drei hat höchstens den Grad eins und jedes solche Polynom tritt auch auf, da jede Stammfunktion einer Stammfunktion Urbild ist. Also besteht auch das Bild genau aus den linearen Polynomen und hat auch $\{1, X\}$ als Basis.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem

$$x+y+z+w=4 \quad \text{und} \quad x-y+z-w=0$$

eine Ebene im vierdimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^4$ ist!

Lösung: Da die linken Seiten der beiden Gleichungen linear unabhängig sind, haben sowohl die Matrix als auch die erweiterte Matrix des Gleichungssystems den Rang zwei, die Dimension des Lösungsraums ist also $4-2=2$, so daß dieser in der Tat eine Ebene ist.

b) Berechnen Sie den Durchschnitt dieser Ebene mit dem affinen Unterraum

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda,\mu\in\mathbb{R} \right\} \text{ !}$$

Lösung: Die zweite Ebene besteht aus allen Punkten

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-\lambda+\mu\\2+\lambda-2\mu\\3-2\mu\\4-2\lambda-\mu\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}\,.$$

Einsetzen in das Gleichungssystem aus *a)* ergibt

$$(1-\lambda+\mu)+(2+\lambda-2\mu)+(3-2\mu)+(4-2\lambda-\mu) = 10-2\lambda-4\mu = 4$$

und

$$(1-\lambda+\mu)-(2+\lambda-2\mu)+(3-2\mu)-(4-2\lambda-\mu) = -2+2\mu = 0\,.$$

Also liegt der Punkt mit Parametern (λ,μ) genau dann in der ersten Ebenen, wenn $\mu=1$ und damit auch $\lambda=1$ ist; der Durchschnitt besteht also nur aus dem einen Punkt

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

c) Bestimmen Sie den affinen Unterraum des $\mathbb{R}^4$, den diese beiden Ebenen aufspannen!

Lösung: Da der Durchschnitt der beiden Ebenen aus genau einem Punkt besteht, also nicht leer und nulldimensional ist, hat der aufgespannte Raum nach der Dimensionsformel die Dimension $2+2-0=4$. Der einzige vierdimensionale affine Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist $\mathbb{R}^4$ selbst, die Ebenen spannen also den gesamten $\mathbb{R}^4$ auf.

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Für welche $a\in\mathbb{R}$ bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix}0\\1\\2\\a\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\6\\7\\8\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}9\\0\\0\\2a\end{pmatrix}$$

Lösung: Vier Vektoren des $\mathbb{R}^4$ bilden genau dann eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind; das wiederum ist äquivalent dazu, daß ihre Determinante nicht verschwindet. Diese ist

$$D \underset{\text{def}}{=} \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 0 \\ a & 5 & 8 & 2a \end{vmatrix} .$$

Wegen der beiden Nullen bietet sich Entwicklung nach der ersten Zeile oder nach der vierten Spalte an. Wählen wir die erste Zeile, ist

$$D = -a \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ a & 8 & 2a \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ a & 5 & 8 \end{vmatrix} .$$

Der erste Summand wird, wenn wir nach der letzten Spalte entwickeln, gleich

$$(-a) \cdot (2a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 10a^2 ,$$

der zweite ist nach der SARRUSschen Regel gleich

$$(-9) \cdot (32 + 21a + 60 - 24a - 48 - 35) = (-9) \cdot (9 - 3a) = 27a - 81 .$$

Somit ist $D = 10a^2 + 27a - 81$. Dies verschwindet für

$$a = \frac{-27 \pm \sqrt{27^2 + 4 \cdot 10 \cdot 81}}{20} = \frac{-27 \pm \sqrt{9^2(3^2 - 4 \cdot 10}}{20} = \frac{-27 \pm 9\sqrt{49}}{20} = \frac{-27 \pm 63}{20} .$$

Die beiden Nullstellen sind also

$$a_1 = \frac{63 - 27}{20} = \frac{36}{20} = \frac{9}{5} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{-27 - 63}{20} = -\frac{90}{20} = -\frac{9}{2} ,$$

und für alle anderen Werte von a bilden die Vektoren eine Basis.

Aufgabe 5: (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

Lösung: Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & -1 \\ -2 & 4-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 2 - (4-\lambda) + 6 \cdot (1-\lambda) \\ &= (\lambda^2 - 1)(4-\lambda) + (4 - 5\lambda) = -\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 + (4 - 5\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 4\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -\lambda(\lambda - 2)^2 . \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert der algebraischen Vielfachheit eins und $\lambda = 2$ einer der algebraischen Vielfachheit zwei.

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?

Lösung: $\lambda = 0$ hat natürlich auch die geometrische Vielfachheit eins; für $\lambda = 2$ müssen wir rechnen: Das Gleichungssystem

$$(A - 2E) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

wird ausgeschrieben zu

$$\begin{aligned} -3x + 3y - z &= 0 \\ -2x + 2y \phantom{{}-z} &= 0 \\ -x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

Subtraktion von dreimal der letzten Gleichung von der ersten führt zu $2z = 0$ und damit $z = 0$; dies führt, eingesetzt in die letzte Gleichung, auf $x = y$. Der Eigenraum ist also eindimensional und wird aufgespannt von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Insbesondere ist die geometrische Vielfachheit von $\lambda = 2$ nur eins.

c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Hauptvektoren von A und geben Sie A bezüglich dieser neuen Basis an!

Lösung: Zur Berechnung eines Hauptvektors zweiter Stufe zum Eigenwert zwei müssen wir $(A - 2E)$ quadrieren; Nachrechnen zeigt, daß

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

ist. Der Hauptraum wird also durch die Gleichung

$$x - y + z = 0$$

beschrieben. Im Eigenraum ist $z = 0$; setzen wir $z = 1$, ist $x = y - 1$; mit $y = 1$ ist also $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängige Lösung und damit ein Hauptvektor zweiter Stufe.

Für eine Basis des $\mathbb{R}^3$ brauchen wir noch einen Eigenvektor zum Eigenwert null, wir müssen also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x + 3y - z &= 0 \\ -2x + 4y \phantom{{}-z} &= 0 \\ -x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Subtraktion der dritten Gleichung von der ersten führt zu $2y - 2z = 0$ oder $y = z$ und die zweite Gleichung zeigt, daß $x = 2y$ ist. Also ist $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor und

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ist eine Basis aus Hauptvektoren.

Die ersten beiden Basisvektoren sind Eigenvektoren zum Eigenwert null *bzw.* zwei, bezüglich der neuen Basis wird also die erste Spalte der Matrix zum Nullvektor und die zweite zu $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für den dritten Basisvektor schreiben wir

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 + \alpha \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

dies gilt nur für $\alpha = -2$. Die Matrix hat bezüglich der neuen Basis daher die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 6: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums des EUKLIDischen Vektorraums $\mathbb{R}^4$ mit seinem Standardskalarprodukt!

Lösung: Wir bestimmen zunächst nach GRAM-SCHMIDT eine Orthogonalbasis, wobei wir als ersten Vektor einfach $\vec{b}_1 = \nu v_1$ nehmen. Den zweiten Vektor setzen wir an als $\vec{b}_2 = \vec{v}_2 + \lambda \vec{b}_1$ und wählen λ so, daß

$$\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_2 \cdot \vec{b}_1 + \lambda \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{-\vec{v}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} = -\frac{49}{49} = -1$$

ist. Also ist

$$\vec{b}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Den dritten Basisvektor setzen wir an als $\vec{b}_3 = \vec{v}_3 + \lambda \vec{b}_1 + \mu \vec{b}_2$ mit den Bedingungen

$$\vec{b}_3 \cdot \vec{b}_1 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1 + \lambda \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1 = 0 \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2 + \mu \vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2 = 0\,;$$

dies führt auf

$$\lambda = -\frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} = -\frac{49}{49} = -1 \quad \text{und} \quad \mu = -\frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{b}_2}{\vec{b}_2 \cdot \vec{b}_2} = -\frac{49}{49} = -1\,.$$

Also ist

$$\vec{b}_3 = \vec{v}_3 - \vec{b}_1 - \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Damit ist eine Orthogonalbasis gefunden. Das Skalarprodukt jedes der Basisvektoren mit sich selbst ist

$$2^2 + 3^2 + 6^2 + 0^2 = 49 = 7^2\,,$$

eine Orthonormalbasis ist also beispielsweise

$$\left\{ \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} .$$

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \\ 6i \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 3+2i \\ 6i \\ -6i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums des HERMITEschen Vektorraums $\mathbb{C}^4$ mit seinem Standard HERMITEschen Produkt!

Lösung: Die grundsätzliche Vorgehensweise ist wie in *a)*, wir müssen allerdings mit dem HERMITEschen Skalarprodukt rechnen. Wir suchen zunächst wieder nur eine Orthogonalbasis und setzen dazu $\vec{c}_1 = \vec{w}_1$; für diesen Vektor ist

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1 = (2i) \cdot (-2i) + 3 \cdot 3 + (6i) \cdot (-6i) = 49 = 7^2 .$$

Für den zweiten Vektor machen wir den Ansatz

$$\vec{c}_2 = \vec{w}_2 + \lambda \vec{c}_1 \quad \text{mit} \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \vec{w}_2 \cdot \vec{c}_1 + \lambda \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 0 .$$

Wegen

$$\vec{w}_2 \cdot \vec{c}_1 = (3+2i) \cdot (-2i) + (3+2i) \cdot 3 + (6i) \cdot (-6i) = -6i + 4 + 9 + 6i + 36 = 49$$

ist $\lambda = -1$ und $\vec{c}_2 = \vec{w}_2 - \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2i \\ 0 \\ -6i \end{pmatrix}$. Auch dieser Vektor hat wieder die Länge sieben, die gesuchte Orthonormalbasis ist also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \\ 6i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2i \\ 0 \\ -6i \end{pmatrix} \right\} .$$

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)
Bestimmen Sie Normalform, Rang und Signatur der Quadrik $2xy - z^2 + 4z = -4$ in $\mathbb{R}^3$!

Lösung: Da x und y nur in xy vorkommen, können wir einfach dieselbe Substitution machen wie in der Hyperbelgleichung: Mit $u = x + y$ und $v = x - y$ ist $x = \frac{u+v}{2}$ und $y = \frac{u-v}{2}$, also $xy = \frac{u^2}{4} - \frac{v^2}{4}$. Damit haben wir die neue Gleichung

$$\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} - z^2 + 4z = -4 .$$

Zur Elimination des Terms $4z$ durch quadratische Ergänzung setzen wir $w = z - 2$ oder $z = w + 2$; dann ist

$$-z^2 + 4z = -w^2 - 4w - 4 + 4w + 8 = -w^2 - 4 \quad \text{und} \quad 2xy - z^2 + 4z = \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} - w^2 - 4 = -4 .$$

Da wir bei rechter Seite null die Anzahl der Pluszeichen maximieren, ist die Normalform also

$$w^2 + \frac{v^2}{2} - \frac{u^2}{2} = 0 ,$$

d.h. die Quadrik hat Rang drei und die Signatur $(2, 1)$. Offensichtlich handelt es sich um einen (elliptischen) Kegel.

Abgabe bis zum Freitag, dem 22. Oktober 1999 um 13^{00} Uhr