WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

D7,27, ZIMMER 401

22. Oktober 1999

Nachklausur und 14. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Falls die beiden Vektoren $\vec{b}_1 \neq \vec{0}$ und $\vec{b}_2 \neq \vec{0}$ des $\mathbb{R}^3$ aufeinander senkrecht stehen, ist $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_1 \times \vec{b}_2\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$.

2) Richtig oder falsch: Jedes homogene lineare Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.

3) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sei der Vektorraum aller reeller 2×2-Matrizen. Dann ist die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$; $A \mapsto \det A$ linear.

4) Welche Dimension hat der Vektorraum aller symmetrischer reeller 2×2-Matrizen?

5) Richtig oder falsch: Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gibt es eine Basis des $\mathbb{C}^n$, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine obere Dreiecksmatrix ist.

6) Richtig oder falsch: $\mathbb{R}^5$ hat eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

7) Richtig oder falsch: Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto e^{\lambda x}$ Eigenvektor der linearen Abbildung $\varphi\colon \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f \mapsto \frac{df}{dx}$.

8) Richtig oder falsch: Die FOURIER-Reihe von $f(t) = |\sin t|$ enthält nur Sinusterme.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & ax_4 & = & -a \\ & - & 2x_2 & + & (a-1)x_3 & - & 2x_4 & = & -1 \\ -x_1 & & & + & ax_3 & + & 4x_4 & = & 5 \end{array}$$

Aufgabe 2: *(4 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller Polynome $a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ mit $a_i \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $\varphi\colon V \to V$; $f \mapsto f''$ linear ist!

b) Bestimmen Sie eine Basis von V und die Abbildungsmatrix von φ bezüglich dieser Basis!

c) Geben Sie Basen für Kern und Bild von φ an!

• • • **BITTE WENDEN!** • • •

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystem

$$x+y+z+w=4 \quad \text{und} \quad x-y+z-w=0$$

eine Ebene im vierdimensionalen affinen Raum $\mathbb{R}^4$ ist!

b) Berechnen Sie den Durchschnitt dieser Ebene mit dem affinen Unterraum

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \;!$$

c) Bestimmen Sie den affinen Unterraum des $\mathbb{R}^4$, den diese beiden Ebenen aufspannen!

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Für welche $a \in \mathbb{R}$ bilden die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^4$?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5: (*9 Punkte*)

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$!

b) Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die einzelnen Eigenwerte?

c) Bestimmen Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Hauptvektoren von A und geben Sie A bezüglich dieser neuen Basis an!

Aufgabe 6: (*7 Punkte*)

a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums des EUKLIDischen Vektorraums $\mathbb{R}^4$ mit seinem Standardskalarprodukt!

b) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des von $\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ 3 \\ 6i \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3+2i \\ 3+2i \\ 6i \\ -6i \end{pmatrix}$ aufgespannten Untervektorraums des HERMITEschen Vektorraums $\mathbb{C}^4$ mit seinem Standard HERMITEschen Produkt!

Aufgabe 7: (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie Normalform, Rang und Signatur der Quadrik $2xy - z^2 + 4z = -4$ in $\mathbb{R}^3$!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Freitag, dem 22. Oktober 1999 um 13^{00} Uhr