Wolfgang K. Seiler — D7,27, Zimmer 401
Tel. 8847

3. Juli 1999

Klausur und 12. Übungsblatt Höhere Mathematik I

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Für eine Orthonormalbasis $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ von $\mathbb{R}^3$ ist $(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \times \vec{b}_3 = \vec{0}$.

2) Richtig oder falsch: Für einen Vektor $\vec{v} \in \mathbb{F}_2^n$ ist $\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$.

3) Richtig oder falsch: Der Lösungsraum eines linearen Gleichungssystems aus zwei Gleichungen in drei Unbekannten ist mindestens eindimensional.

4) Richtig oder falsch: Für eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gilt: Ist $\operatorname{Kern} \varphi$ eindimensional, so ist $\operatorname{Kern}(\varphi \circ \varphi)$ mindestens zweidimensional.

5) Richtig oder falsch: Jede reelle 2×2-Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.

6) Richtig oder falsch: Für jede reelle $n \times n$-Matrix A hat der $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Hauptvektoren von A.

7) Richtig oder falsch: Die Summe zweier Hermitescher Matrizen ist wieder Hermitesch.

8) Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 1 & -2 & 1 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$ positiv definit?

Aufgabe 1: *(6 Punkte)*
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in k$ die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} x + y - z &=& 1 \\ 3w + ax - y + z &=& 2a \\ w - y + z &=& 1 \\ aw - x - ay + 3z &=& 1 \end{array}$$

Aufgabe 2: *(6 Punkte)*
V sei der Vektorraum aller reeller symmetrischer 2×2-Matrizen.

a) Bestimmen Sie eine Basis von V!

b) Berechnen Sie für eine *invertierbare* symmetrische 2×2-Matrix A die Matrix $(\det A) \cdot A^{-1}$ und zeigen Sie, daß es eine lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ gibt, so daß für jede invertierbare Matrix A aus V gilt: $\varphi(A) = (\det A) \cdot A^{-1}$.

c) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix M von V bezüglich der Basis aus *a)*!

d) Berechnen Sie das Quadrat von M!

• • • **BITTE WENDEN!** • • •

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*
Für welche $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sind die folgenden fünf Vektoren linear abhängig?

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b \\ a \\ b \\ a \\ a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$!

Aufgabe 6: *(7 Punkte)*

a) Berechnen Sie für zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ den Betrag von $z_1 - iz_2$!

b) Zeigen Sie: Durch die Vorschrift

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \underset{\text{def}}{=} z_1\overline{w_1} + i\big(z_1\overline{w_2} - z_2\overline{w_1}\big) + 2z_2\overline{w_2}$$

wird ein HERMITEsches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ definiert.

c) Berechnen Sie die Produkte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} !$$

d) Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^2$ für dieses HERMITEsche Skalarprodukt, d.h. eine Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, für die $\vec{b}_1 \odot \vec{b}_1 = \vec{b}_2 \odot \vec{b}_2 = 1$ und $\vec{b}_1 \odot \vec{b}_2 = 0$ ist!

Aufgabe 7: *(5 Punkte)*
Bestimmen Sie Normalform, Rang und Signatur der Quadrik $2x^2 - 4xy + y^2 - 8y = 7$ in $\mathbb{R}^2$!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Samstag, dem 3. Juli 1999 um 13^{00} Uhr