WOLFGANG K. SEILER
Tel. 8847

D7,27, Zimmer 401

18. Juni 1999

10. Übungsblatt Höhere Mathematik I

Fragen: *(je ein Punkt)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Summe zweier Hauptvektoren einer Matrix ist wieder ein Hauptvektor.

2) *Richtig oder falsch:* Zu jedem Eigenwert der algebraischen Vielfachheit r gibt es einen Hauptvektor r-ter Stufe.

3) *Richtig oder falsch:* V sei ein endlichdimensionaler EUKLIDischer Vektorraum. Falls für einen Vektor $\vec{v} \in V$ gilt, daß $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ ist für alle $\vec{w} \in V$, ist $\vec{v}$ der Nullvektor.

4) *Richtig oder falsch:* Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat lauter reelle Eigenwerte.

5) *Richtig oder falsch:* Die Determinante einer HERMITEschen Matrix ist reell.

Aufgabe 1: (*5 Punkte)*

a) Berechnen Sie die sämtlichen Hauptvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$!

b) Geben Sie eine Basis des $\mathbb{R}^3$ an, bezüglich derer A Dreiecksgestalt hat, und berechnen Sie die hundertste Potenz dieser Dreiecksmatrix!

Aufgabe 2: (*5 Punkte)*

V sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad höchstens zwei.

a) Berechnen Sie für zwei Polynome $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$ und $g = b_2x^2 + b_1x + b_0$ explizit das Produkt

$$(f, g) \underset{\text{def}}{=} \int_0^1 f(x)g(x)\,dx\,!$$

b) Zeigen Sie, daß dadurch ein Skalarprodukt auf V definiert ist!

c) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von V bezüglich dieses Skalarprodukts!

Aufgabe 3: (*5 Punkte)*

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des Untervektorraums

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2-2i \\ -4i \\ 4+i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4-i \\ 0 \\ 4+2i \\ 4 \\ 4+i \end{pmatrix} \right]$$

von $\mathbb{C}^5$ mit seinem Standard HERMITEschen Produkt!

Abgabe bis zum Freitag, dem 25. Juni 1999 um 12.00 Uhr