$x_2 = -2x_3$ und $x_1 = -x_3$ eindeutig festgelegt; die entsprechenden Lösungen sind also die Vielfachen der Lösung $(-1, 2, 1, 0)$.

Genausogut könnte etwa $x_3 = 0$ gesetzt werden; dann wäre $x_2 = -3x_4$ und $x_1 = -2x_4$; dies führt auf die Vielfachen der Lösung $(-2, -3, 0, 1)$.

Damit haben wir zwei linear unabhängige Lösungen gefunden; da der Lösungsraum zweidimensional ist, sind die sämtlichen Lösungen des Gleichungssystems daher die Linearkombinationen

$$x_1 = -\lambda - 2\mu, \quad x_2 = 2\lambda - 3\mu, \quad x_3 = \lambda \quad \text{und} \quad x_4 = \mu$$

dieser beiden Lösungen. Insbesondere besteht also der Eigenraum von A zum Eigenwert Null genau aus den sämtlichen Linearkombinationen

$$\lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Genauso lassen sich auch die Eigenwerte -4 und 18 behandeln; -4 führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 7x_2 + 10x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_1 &= 0 , \end{aligned}$$

dessen sämtliche Lösungen gerade die Vielfachen von $(-1, -1, 1, 1)$ sind, und 18 führt auf

$$\begin{aligned} -17x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_1 - 12x_2 + 7x_3 + 8x_4 &= 0 \\ 8x_1 + 7x_2 - 12x_3 + 5x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 17x_4 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Vielfachen von $(5, 13, 13, 5)$ als Lösungsraum.

Was haben wir nun erreicht? Betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4; \quad \vec{v} \mapsto A \cdot \vec{v} .$$

Für die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ist

$$\varphi(\vec{b}_1) = 0\,\vec{b}_1, \quad \varphi(\vec{b}_2) = 0\,\vec{b}_2, \quad \varphi(\vec{b}_3) = -4\,\vec{b}_3 \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{b}_4) = 18\,\vec{b}_4 ;$$

bezüglich der neuen Basis $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$ hat φ daher die Abbildungsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} ,$$

die erheblich angenehmer ist als die ursprüngliche Matrix A. Sie hat die Eigenwerte von φ in der Diagonalen stehen, und alle anderen Einträge sind null.

Es ist kein Zufall, daß im obigen Beispiel die Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$ auf ein Polynom vierten Grades führte: Ist $A = (a_{ij})$ eine $n \times n$-Matrix, so hat die Matrix $A - \lambda E$ in der Diagonalen die Einträge $a_{ii} - \lambda$, ansonsten stimmen alle Einträge mit denen von A überein. Berechnet man daher $\det(A - \lambda E)$ gemäß der definierenden Formel, so gibt es genau ein Produkt, in dem n mit λ behaftete Faktoren vorkommen, nämlich das Produkt

$$(a_{11} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda) = (-1)^n \lambda^n + \textit{Terme niedrigerer Ordnung}$$

der Diagonaleinträge. Die restlichen Produkte, die zur Determinante aufsummiert werden, enthalten zwischen null und $n - 1$ mit λ behaftete Faktoren, die Summe ist also ein Polynom vom Grad n mit höchstem Term $(-1)^n \lambda^n$.

Definition: Das Polynom $\det(A - \lambda E)$ heißt *charakteristisches Polynom* der Matrix A.

Demgemäß sind also die Eigenwerte der linearen Abbildung φ oder, wie wir auch sagen werden, die Eigenwerte von A, gleich den Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A.

Ist x eine Nullstelle eines Polynoms $f(X)$, so kann $f(X)$ bekanntlich durch $(X-x)$ geteilt werden, und x heißt n*-fache Nullstelle* von $f(X)$, wenn $f(X)$ durch $(X-x)^n$ teilbar ist, nicht aber durch $(X-x)^{n+1}$.

Definition: Wir sagen, der Eigenwert λ von φ *bzw.* A habe die *algebraische Vielfachheit* r, wenn λ eine r-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

Im obigen Beispiel hatte also der Eigenwert Null die algebraische Vielfachheit zwei, die anderen beiden hatten algebraische Vielfachheit eins. Die Dimension des jeweiligen Eigenraums, die geometrische Vielfachheit also, war genauso groß, jedoch muß dies im allgemeinen nicht der Fall sein: Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

etwa hat das charakteristische Polynom

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$$

die doppelte Nullstelle Eins, $\lambda = 1$ ist also ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit zwei. Der zugehörige Eigenraum ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$0x_1 + 1x_2 = 0$$

$$0x_1 + 0x_2 = 0\,,$$

also gerade die Menge aller Vektoren der Form $\binom{x}{0}$ und damit eindimensional. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts eins ist daher nur eins.

Das Beispiel der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\vartheta - y\sin\vartheta \\ y\cos\vartheta + x\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

mit Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

zeigt, daß es überhaupt keine Eigenwerte geben muß, denn hier ist das charakteristische Polynom gleich

$$\begin{vmatrix} \cos\vartheta-\lambda & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta-\lambda \end{vmatrix} = (\cos\vartheta-\lambda)^2 + \sin^2\vartheta\,,$$

und abgesehen vom Fall $\sin\vartheta = 0$, wenn A gleich der positiven oder negativen Einheitsmatrix ist, hat dieses Polynom keine reelle Nullstelle, da es nur positive Werte annimmt. Es hat aber natürlich die beiden komplexen Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \cos\vartheta \pm i\sin\vartheta = e^{\pm i\vartheta}\,;$$

fassen wir φ als Abbildung von $\mathbb{C}^2$ nach $\mathbb{C}^2$ auf, gibt es also zwei Eigenwerte. Beide haben die algebraische und geometrische Vielfachheit eins; zugehörige Eigenvektoren sind etwa $\binom{1}{i}$ und $\binom{1}{-i}$. Wählen wir diese beiden Vektoren als Basis, so wird die Abbildungsmatrix von φ bezüglich dieser neuen Basis zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} e^{i\vartheta} & 0 \\ 0 & e^{-i\vartheta} \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt für die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten von Eigenvektoren

Satz: *a)* Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit.
b) Die Summe der algebraischen Vielfachheiten der verschiedenen Eigenwerte einer linearen Abbildung ist kleiner oder gleich der Dimension des Vektorraums.

Beweis: a) Der Eigenwert λ von φ habe die geometrische Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ dieses Eigenraums und ergänzen sie zu einer Basis des gesamten Vektorraums; bezüglich dieser Basis sei A die Abbildungsmatrix von φ.

Da $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ Eigenvektoren zum Eigenwert λ sind, ist $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$. In den ersten r Spalten von A steht also jeweils in der Diagonalen das Element λ und ansonsten überall die Null, d.h. A hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei uns weder die mit $*$ bezeichneten Körperelemente noch die $(n-r) \times (n-r)$-Matrix M weiter zu interessieren brauchen.

Für $A - xE$ gilt dasselbe, nur daß jetzt $\lambda - x$ in der Diagonalen steht, d.h. diese Matrix hat die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & \lambda - x & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda - x & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \mathsf{M} - \mathsf{x}\mathsf{E}_{n-r} & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Zur Berechnung ihrer Determinanten verwenden wir den LAPLACEschen Entwicklungssatz: Da in der ersten Zeile (oder Spalte) nur an der ersten Stelle ein von Null verschiedener Eintrag steht, ist diese Determinante gleich $(\lambda - x)$ mal der Determinante jener Matrix, die durch Streichen der ersten Zeile und Spalte entsteht. Falls $r > 1$ ist, hat diese neue Matrix dieselbe Form, wir können den LAPLACEschen Entwicklungssatz also noch einmal anwenden *usw.;* wir erhalten schließlich

$$\det(A - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r}).$$

Somit ist $\det(A - xE)$ durch $(x - \lambda)^r$ teilbar; die algebraische Vielfachheit von λ ist also mindestens r.

b) Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell$ die verschiedenen Eigenwerte von φ und sind $r_1, \ldots, r_\ell$ ihre algebraischen Vielfachheiten, so ist das charakteristische Polynom $\det(A - xE)$ teilbar durch

$$(x - \lambda_1)^{r_1} \cdots (x - \lambda_\ell)^{r_\ell}.$$

Dies ist ein Polynom vom Grad $r_1 + \cdots + r_\ell$, wohingegen das charakteristische Polynom Grad n hat; daher ist

$$r_1 + \cdots + r_\ell \leq n,$$

denn der Grad eines Teilers kann nicht größer sein als der des Polynoms selbst.

■

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch ein Kriterium angegeben, wann es für eine lineare Abbildung φ eine Basis aus Eigenwerten gibt, wann also die Abbildsmatrix bezüglich einer geeigneten Basis Diagonalgestalt hat:

Satz: Zur linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ eines n-dimensionalen Vektorraums gibt es genau dann eine Basis aus Eigenvektoren von φ, wenn

1.) das charakteristische Polynom von φ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann

2.) die geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich der algebraischen ist.

Beweis: Zunächst sei $\varphi: V \to V$ eine lineare Abbildung derart, daß V eine Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ aus Eigenvektoren von φ habe. Wir müssen zeigen, daß *1.)* und *2.)* erfüllt sind.

Da die Basisvektoren $\vec{b}_i$ Eigenvektoren sind, gibt es zu jedem $\vec{b}_i$ ein Körperelement λ_i, so daß $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$ ist; bezüglich dieser Basis hat die Abbildungsmatrix A von φ daher Diagonalgestalt, und das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \lambda_n - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)$$

zerfällt in der Tat in Linearfaktoren. Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts λ_i ist gleich der Anzahl jeder Indizes $j \in \{1, \dots, n\}$, für die $\lambda_j = \lambda_i$ ist; dies ist auch die geometrische Vielfachheit, denn der Eigenraum wird aufgespannt von den Vektoren $\vec{b}_j$ zu diesen j. Also sind *1)* und *2)* erfüllt.

Umgekehrt erfülle die Abbildung φ die Bedingungen *1)* und *2);* wir müssen zeigen, daß es eine Basis aus Eigenvektoren von φ gibt.

Wegen *1)* läßt sich das charakteristische Polynom in der Form

$$(\lambda_1 - \lambda)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (\lambda_r - \lambda)^{\alpha_r}$$

schreiben, wobei wir annehmen können, daß die λ_i paarweise verschieden sind. Dann ist α_i die algebraische Vielfachheit von λ_i. Da das charakteristische Polynom den Grad n hat, folgt, daß

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_r = n$$

ist. Außerdem gibt es wegen *2.)* zu jedem λ_i einen α_i-dimensionalen Eigenraum, also α_i linear unabhängige Eigenvektoren. Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nach dem Lemma vom Anfang dieses Abschnitts stets linear unabhängig sind, ist auch das System all dieser Eigenvektoren linear unabhängig und somit eine Basis, denn es besteht aus $n = \dim V$ Vektoren. Damit ist eine Basis aus Eigenvektoren von φ gefunden.

■

j) Hauptvektoren und und die Jordan-Zerlegung

Falls die lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ Eigenwerte hat, deren geometrische Vielfachheit kleiner als die algebraische ist, haben wir keine Chance auf eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ Diagonalgestalt hat, denn die Elemente dieser Basis wären allesamt Eigenvektoren, und bei zu kleiner geometrischer Vielfachheit gibt es nicht genügend linear unabhängige Eigenvektoren. Außerdem gibt es ofensichtlich keine Chance auf eine Diagonalgestalt, wenn das charakteristische Polynom von φ nicht in Linearfaktoren zerfällt, denn dann ist schon die Summe der *algebraischen* Vielfachheiten der Eigenwerte kleiner als die Dimension von V.

Das zweite dieser Probleme läßt sich – wie wir im vorigen Abschnitt anhand eines Beispiels gesehen haben – dadurch lösen, daß wir zu einem größeren Körper übergehen, also etwa von den reellen zu den komplexen Zahlen. Auch wenn wir das im Augenblick noch nicht beweisen können, werden doch die meisten Leser schon irgendwo gehört haben, daß über den komplexen Zahlen jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt, so daß dort dieses Problem nicht mehr auftreten kann.

Ernster ist das erste Problem; dazu wollen wir uns in diesem Abschnitt überlegen, wie man, wenn schon keine Diagonalgestalt, doch wenigstens eine möglichst einfache Gestalt der Abbildungsmatrix finden kann.

Eine wesentliches Hilfsmittel dazu sind invariante Unterräume:

Definition: $\varphi: V \to V$ sei eine lineare Abbildung. Ein Untervektorraum $U \le V$ heißt invariant unter φ oder kurz φ-invariant, wenn $\varphi(U) \le U$ ist.

Offensichtlich sind die Eigenräume von φ invariante Unterräume im Sinne dieser Definition; wir werden uns, für den Fall, daß diese nicht ausreichen, im Laufe dieses Abschnitts noch weitere Beispiele konstruieren. Da es hier vor allem um Matrizen gehen soll, wollen wir für den Rest dieses Abschnitts annehmen, daß V endliche Dimension habe.

Ist U ein φ-invarianter Unterraum, so können wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ von U ergänzen zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ von V; da $\varphi(U) \le U$ ist, liegen die Bilder der ersten r Basisvektoren wieder in U, d.h. die Abbildungsmatrix bezüglich dieser Basis hat die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \boxed{C} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

mit einer $r \times r$-Matrix A, der Abbildungsmatrix von $\varphi_{|U}: U \to U$, einer $(n-r) \times (n-r)$-Matrix B und einer $(n-r) \times r$-Matrix C. Die fette Null soll hier, wie auch in den noch folgenden Matrizen, stets eine Nullmatrix der jeweils korrekten Größe bezeichnen.

Noch besser wird die Situation, wenn U ein φ-invariantes Komplement hat, wenn es also einen weiteren φ-invarianten Untervektorraum W gibt, so daß $V = U \oplus W$ die direkte Summe (*s. §5g)*) von U und W ist. In diesem Fall können wir für $\vec{b}_{r+1}$ bis $\vec{b}_n$ die Vektoren einer Basis von W nehmen, und da nun auch W auf sich selbst abgebildet wird, haben wir eine Abbildungsmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B} \end{pmatrix} .$$

Haben wir allgemein s Untervektorräume $U_1, \dots U_s$ von V mit der Eigenschaft, daß

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_s$$

ist, können wir entsprechend Basen der Räume U_i aneinandersetzen und erhalten eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat, wobei die A_i die Abbildungsmatrizen der Einschränkungen $\varphi_{|U_i}$ sind.

Kandidaten für Untervektorräume U_i liefern die Haupträume:

Definition: *a)* Ein Vektor $\vec{v} \in V$ heißt *Hauptvektor* von φ zum Eigenwert λ, wenn es ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{v}) = \vec{0}$ ist. Das kleinste solche ℓ heißt *Stufe* des Hauptvektors.

b) Die Menge aller Hauptvektoren von φ zum Eigenwert λ heißt *Hauptraum* zu λ und wird mit H_λ bezeichnet.

Beispielsweise sind also die Hauptvektoren der Stufe eins abgesehen vom Nullvektor gerade die Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Es ist klar, daß die Hauptvektoren einen Untervektorraum bilden, denn mit $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$ sind auch dessen Schachtelungen

$$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}) \circ \cdots \circ (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})$$

lineare Abbildungen, und die Hauptvektoren der Stufe höchstens ℓ sind gerade die Elemente des Kerns dieser Abbildung. Da wir von einem endlichdimensionalen Vektorraum V ausgehen, kann die Folge dieser Kerne nicht unbeschränkt ansteigen, es gibt also ein maximales ℓ, das als Stufe eines Hauptvektors auftreten kann, und mit diesem ℓ ist der Hauptraum H_λ gerade der Kern von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$.

Der Nutzen der Haupträume ergibt sich aus folgendem

Lemma: H_λ ist ein φ-invarianter Unterraum von V. Bezeichnet ℓ die größte Stufe eines Hauptvektors aus H_λ, so ist Bild$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ ein φ-invariantes Komplement.

Beweis: Beginnen wir mit der Invarianz von H_λ unter φ.

Ist $\vec{v}$ ein Hauptvektor der Stufe j, so ist

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^j(\vec{v}) &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\vec{v})\big) \\ &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{j-1}\big(\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}\big) = \vec{0}\,,\end{aligned}$$

$\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}$ ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens $j-1$. Da mit $\vec{v}$ auch $\lambda\vec{v}$ in H_λ liegt, ist damit auch $\varphi(\vec{v})$ ein Hauptvektor.

Für $\vec{v} \in$ Bild$(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ liegt zunächst auch $\varphi(\vec{v}) - \lambda\vec{v}$ im Bild von $\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell\big)$, denn das Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$ enthält das Bild von $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}$. Da mit $\vec{v}$ auch $\lambda\vec{v}$ im Bild liegt, folgt auch wieder die Behauptung.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß der Durchschnitt der beiden Summanden nur aus dem Nullvektor besteht. Dazu sei $\vec{v}$ im Durchschnitt der beiden Räume. Dann liegt $\vec{v}$ sowohl im Kern als auch im Bild der linearen Abbildung $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell$, es gibt also einen Vektor $\vec{w} \in v$, so daß $\vec{v} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{w})$ ist, und $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{v}) = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{2\ell}(\vec{w}) = \vec{0}$. Damit liegt aber auch $\vec{w}$ im Hauptraum zu λ, d.h. $\vec{v} = (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec{w}) = \vec{0}$.