Auch als Hilfmittel zur Berechnung allgemeinerer Determinanten ist der LAPLACEsche Entwicklungssatz oft nützlich, da er bei geschickter Anwendung gelegentlich eine $n \times n$-Determinante auf eine einzige $(n-1)\times(n-1)$-Determinante zurückführen kann. Als Beispiel betrachten wir die unter anderem in der Numerik wichtige VANDERMONDEsche Determinante

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Der Franzose ALEXANDRE THÉOPHILE VANDERMONDE (1735–1796) war zunächst Musiker; erst im Alter von 35 Jahren begann er, sich für Mathematik zu interessieren und publizierte in den Jahren 1771 und 1772 vier Arbeiten über Gleichungen, Determinanten und über das Problem, einen Springer so über ein Schachbrett zu bewegen, daß er jedes Feld genau einmal betritt. Die VANDERMONDEsche Determinante ist nirgends in seinem publizierten Werk zu finden; sie wurde erst um 1935 von HENRI LEBESGUE (1875–1941) nach ihm benannt.

Für die Anwendung des LAPLACEschen Entwicklungssatzes auf diese Determinante bietet sich an, nach der ersten Spalte zu entwickeln, da diese lauter Einsen enthält und die $(n-1)\times(n-1)$-Determinanten, die nach dem Entwicklungssatz auftreten, bis auf einen Vorfaktor, der durch Ausklammern eines a_i in jeder Zeile entsteht, wieder VANDERMONDEsche Determinanten sind. Allerdings entstehen dabei n Summanden, und für jeden von diesen muß die ganz Prozedur wiederholt werden *usw.*– die Berechnung der Determinante auf diese Weise ist also zumindest ziemlich aufwendig.

Ein besserer Ansatz ergibt sich, wenn wir Einsen in der ersten Spalte dadurch ausnutzen, daß wir etwa die erste Zeile von jeder anderen Zeile subtrahieren. Der Wert der Determinante ändert sich dadurch nicht, es gilt also auch

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 0 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & \dots & a_2^{n-1}-a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n-a_1 & a_n^2-a_1^2 & \dots & a_n^{n-1}-a_1^{n-1} \end{vmatrix} .$$

Wenn wir hier nach der ersten Spalte entwickeln, muß nur eine einzige $(n-1)\times(n-1)$-Determinante berücksichtigt werden, alle anderen haben den Vorfaktor null. Also ist

$$V(a_1,\dots,a_n) = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2^2-a_1^2 & \dots & a_2^{n-1}-a_1^{n-1} \\ a_3-a_1 & a_3^2-a_1^2 & \dots & a_3^{n-1}-a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n^2-a_1^2 & \dots & a_n^{n-1}-a_1^{n-1} \end{vmatrix}$$

gleich jeder Determinanten, die durch Streichung der ersten Spalte und der ersten Zeile entsteht.

Hier können wir in jeder Zeile die jeweils vorne stehende Differenz ausklammern, denn genau wie

$$x^k - 1 = (x-1)(x^{k-1} + x^{k-2} + \dots + x + 1)$$

durch $(x-1)$ teilbar ist, ist auch

$$a_i^k - a_1^k = (a_i - a_1)(a_i^{k-1} + a_i^{k-2}a_1 + a_i^{k-3}a_1^2 + \dots + a_i a_1^{k-2} + a_1^{k-1})$$

durch $(a_i - a_1)$ teilbar; den Quotienten schreiben wir kurz als $q_{i,k-1}$:

$$q_{i,k-1} \underset{\text{def}}{=} a_i^{k-1} + a_i^{k-2}a_1 + a_i^{k-3}a_1^2 + \dots + a_i a_1^{k-2} + a_1^{k-1} .$$

Wegen der Linearität der Determinante können wir jeden Faktor, den wir aus einer Zeile (oder Spalte) ausklammern, vor die Determinante ziehen und erhalten für $V(a_1,\dots,a_n)$ somit den Wert

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2,n-2} \\ 1 & q_{31} & q_{32} & \dots & q_{3,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{n,n-2} \end{vmatrix} .$$

Die Nützlichkeit dieser Formel steht und fällt damit, daß wir die q_{ij} gut miteinander in Verbindung bringen können. Für verschiedene Indizes i haben die entsprechenden Ausdrücke offensichtlich wenig miteinander zu tun, da sie verschiedene Variablen enthalten. Schreiben wir allerdings

$$\begin{aligned} q_{ij} &= a_i^j + a_i^{j-1}a_1 + a_i^{j-2}a_1^2 + \cdots a_i a_1^{j-1} + a_1^j \\ &= a_i^j + a_1(a_i^{j-1} + a_i^{j-2}a_1 + \cdots a_i a_1^{j-2} + a_1^{j-1}) , \end{aligned}$$

so sehen wir, daß

$$q_{ij} = a_i^j + a_1 q_{i,j-1} \quad \text{oder} \quad q_{ij} - a_1 q_{i,j-1} = a_i^j$$

ist. Subtrahieren wir also zuerst a_1 mal die vorletzte Spalte von der letzten, so werden die Einträge der letzten Spalte zu a_i^{n-2}. Entsprechend subtrahieren wir a_1 mal die $(n-2)$-te Zeile von der $(n-1)$-ten und erhalten lauter Einträge a_i^{n-3} und so weiter, bis schließlich die Subtraktion des a_1-fachen der ersten Spalte von der zweiten die Einträge der letzteren zu

$$q_{i1} - a_1 = (a_i + a_1) - a_1 = a_i$$

macht. Somit ist $V(a_1, \dots .a_n)$ gleich

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} .$$

Die Determinante rechts ist offensichtlich wieder eine VANDERMONDEsche Determinante, allerdings mit um eins verminderter Zeilen- und Spaltenzahl und mit einer Variablen weniger.

Damit haben wir die Rekursionsformel

$$V(a_1, \dots, a_n) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\cdots(a_n - a_1)\, V(a_2, \dots, a_n) ,$$

die es erlaubt, die Berechnung von $V(a_1, \dots, a_n)$ auf eine einzige VANDERMONDEsche Determinante der Größe $(n-1) \times (n-1)$ zurückzuführen.

Zur vollständigen Berechnung von $V(a_1, \dots, a_n)$ fehlt uns jetzt nur noch ein Induktionsanfang; direktes Nachrechnen zeigt sofort, daß

$$V(a_n) = \det(1) \quad \text{und} \quad V(a_{n-1}, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_{n-1} \\ 1 & a_n \end{vmatrix} = a_n - a_{n-1}$$

ist, also folgt induktiv

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{j<i} (a_i - a_j) .$$

g) Rechenregeln für Determinanten

Wir kennen schon einige Rechenregeln für Determinanten als Funktionen von n Vektoren, beispielsweise die Forderungen (D1) bis (D3), aus denen wir die Determinantendefinition hergeleitet haben oder auch die gerade angewandte Regel

$$\begin{aligned} &\det(\vec v_1, \dots, \vec v_i + \lambda \vec v_j, \dots, \vec v_n) \\ =&\det(\vec v_1, \dots, \vec v_i, \dots, \vec v_n) + \lambda \det(\vec v_1, \dots, \vec v_j, \dots, \vec v_n) \\ =&\det(\vec v_1, \dots, \vec v_i, \dots, \vec v_n) . \end{aligned}$$

In diesem Abschnitt soll es nun um Rechenregeln für Determinanten von Matritzen gehen.

Am wichtigsten ist der *Multiplikationssatz:*

Satz: *a)* Für zwei Matrizen $A, B \in k^{n\times n}$ ist

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B .$$

b) Für eine invertierbare Matrix $A \in k^{n\times n}$ ist

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} .$$

Beweis: a) Die Determinante von AB ist die Determinante der Spaltenvektoren $\vec v_1, \dots, \vec v_n$ von AB, die von B ist gleich der Determinante der Spaltenvektoren $\vec b_1, \dots, \vec b_n$ von B, und nach Definition der Matrizenmultiplikation ist mit $A = (a_{ij})$

$$\vec v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \vec b_j .$$

Damit sind wir in der Situation der Abschnitte *b)* und *d)* (wobei hier die $\vec b_j$ die Rolle der dortigen $\vec e_j$ übernehmen) und können aus den Eigenschaften (D1) bis (D3) folgern, daß

$$\det(\vec v_1, \dots, \vec v_n) = \left(\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)} \right) \cdot \det(\vec b_1, \dots, \vec b_n)$$

ist. Das ist aber genau die Formel

$$\det(AB) = (\det A) \cdot (\det B)\,.$$

b) Für eine invertierbare Matrix A ist $A \cdot A^{-1} = E$ die Einheitsmatrix, und deren Determinante ist gleich der Determinante der Basisvektoren in ihrer natürlichen Reihenfolge, also 1. Daher ist nach Teil *a)*

$$\det A \cdot \det\bigl(A^{-1}\bigr) = \det E = 1\,,$$

woraus die Behauptung folgt. ■

Als erste Anwendung dieses Satzes können wir Determinanten von linearen Abbildungen $\varphi\colon V \to V$ zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen definieren: Wir setzen einfach

$$\det \varphi \underset{\text{def}}{=} \det A_{\mathcal{B}}\,,$$

wobei $A_{\mathcal{B}}$ die Abbildungsmatrix von φ bezüglich irgendeiner Basis $\mathcal{B}$ von V ist. Diese Abbildungsmatrix hängt natürlich stark von der Basis $\mathcal{B}$ ab: Ist $\mathcal{C}$ eine andere Basis, so wissen wir aus §5*i,* daß es eine invertierbare Matrix M gibt, so daß $A_{\mathcal{C}} = MA_{\mathcal{B}}M^{-1}$; aus dem Multiplikationssatz folgt daher

$$\det(A_{\mathcal{C}}) = \det(MA_{\mathcal{B}}M^{-1}) = \det(M)\det(A_{\mathcal{B}})\det(M)^{-1} = \det(A_{\mathcal{B}})\,,$$

d.h. die beiden Determinanten sind gleich.

Als Beispiel betrachten wir $V = \mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und dazu für ein $c = a + ib \in \mathbb{C}$ die lineare Abbildung φ mit $\varphi(z) = cz$. Wie wir uns bereits in §5*i)* überlegt haben, hat φ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, i\}$ die Abbildungsmatrix

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\,,$$

und deren Determinante ist $a^2 + b^2 = |c|^2$. Also ist $\det \varphi = |c|^2$.

Der Multiplikationssatz läßt sich auch in ein Berechnungsverfahren für Determinanten übersetzen: Falls wir die LR-Zerlegung $LA = R$ der Matrix A kennen, sagt uns der Satz, daß

$$\det A = \frac{\det R}{\det L}$$

ist. Die Determinanten von L und R lassen sich leicht ausrechnen nach dem folgenden

Lemma: Die Determinante einer (unteren oder oberen) Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente.

Beweis: $A = (a_{ij})$ sei eine Dreiecksmatrix. Wie üblich ist

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}\,.$$

Nun ist aber für eine untere *bzw.* obere Dreiecksmatrix $a_{ij} = 0$ falls $i < j$ *bzw.* $i > j$ ist. Da Permutationen bijektive Abbildungen sind, muß es für jede Permutation außer der Identität mindestens ein i geben mit $\pi(i) < i$ und mindestens ein j mit $\pi(j) > j$, d.h. das Produkt $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ enthält für jede nichtidentische Permutation mindestens einen Faktor Null. Damit kann höchstens die Identität einen von Null verschiedenen Beitrag zur Summe liefern; da sie Vorzeichen +1 hat ist also

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$$

das Produkt der Diagonalelemente von A. ■

So wie wir die LR-Zerlegung definiert haben, ist L eine untere Dreiecksmatrix mit lauter Einsen in der Hauptdiagonale und R eine beliebige obere Dreiecksmatrix. Also ist $\det L = 1$, die Determinante von R ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente von R, und damit ist auch

$$\det A = \text{Produkt der Diagonalelemente von } R\,.$$

Zumindest für große n ermöglicht dies eine erheblich effizientere Berechnung von Determinanten als die definierende Formel: Der Aufwand für eine LR-Zerlegung ist ungefähr proportional zu n^3, was für große n weitaus günstiger ist als der überexponentiell steigende Aufwand proportional $n!$ für die Summe aus der definierenden Formel oder dem LAPLACEschen Entwicklungssatz – falls sich dort nicht die Berechnung durch viele Nullen vereinfacht, was bei einer ganzen Reihe praktischer Probleme durchaus der Fall ist. Allerdings gibt es für sogenannte „spärlich besetzte Matrizen“ auch eine ganze Reihe von Algorithmen zur LR-Zerlegung, die diese Nullen noch besser ausnutzen können.

h) Die Cramersche Regel

Determinanten können auch angewandt werden, um die Lösungen eines linearen Gleichungssystems vom Rang n aus n Gleichungen in n Unbekannten in geschlossener Form als Funktion der Koeffizienten darzustellen. Dazu schreiben wir das Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

in der Form

$$x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}\,,$$

wobei die $\vec{a}_i$ die Spaltenvektoren der Matrix A seien und $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems.

Nun ersetzen wir in

$$\det A = \det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\bigr)$$

rechts den Vektor $\vec{a}_i$ durch die rechte Seite $\vec{b}$ des Gleichungssystems. (Es gibt eigentlich keinen vernünftigen Grund, warum wir das tun sollten; auch dieser Trick wird, wie so viele, erst nachträglich durch das Ergebnis gerechtfertigt.) Die so entstehende Determinante ist

$$\begin{aligned}
&\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\\
&= \det\Bigl(\vec{a}_1, \ldots, \sum_{j=1}^n x_j\vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n\Bigr)\\
&= \sum_{j=1}^n x_j \det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_j, \ldots, \vec{a}_n\bigr)\\
&= x_i \det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n\bigr) = x_i \det A\,,
\end{aligned}$$

da für jeden Index $j \neq i$ der Vektor $\vec{a}_j$ zweimal als Argument der Determinante auftritt, so daß alle Summanden bis auf den i-ten verschwinden.

Falls $\det A = 0$ ist, nützt uns diese Formel überhaupt nichts; ist allerdings $\det A \neq 0$, wissen wir bereits, daß das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, und wir können die Komponenten dieser eindeutig bestimmten Lösung explizit ausdrücken durch die

CRAMERsche Regel:

$$x_i = \frac{\det\bigl(\vec{a}_1, \ldots, \vec{b}, \ldots, \vec{a}_n\bigr)}{\det A}$$

Der Schweizer Mathematiker GABRIEL CRAMER (1704–1752) lehrte an der Universität Genf. Bekannt wurde er vor allem durch seine Arbeiten über Determinanten, er beschäftigte sich aber auch viel mit Analysis und Geometrie, insbesondere ist er Autor eines Buchs über algebraische Kurven. Weitere Arbeitsgebiete sind mathematische Methoden der Physik sowie die Geschichte der Mathematik. Die CRAMERsche Regel im Spezialfall $n = 2$ ist bereits 1545 in der *Ars magna* des italienischen Mathematikers GIROLAMO CARDANO (1501–1576) zu finden.

Die CRAMERsche Regel ist sicherlich kein Verfahren, das man oft anwendet zur Lösung eines einzelnen Gleichungssystems: Der Aufwand für die Berechnung von $n + 1$ Determinanten ist weit größer als eine Lösung nach dem GAUSS-Algorithmus. Falls man allerdings eine ganze Familie ähnlicher Gleichungssysteme hat, in der sich nur wenige Parameter ändern, kann es sich lohnen, mit Hilfe der CRAMERschen Regel eine (von den Parametern abhängige) Lösungsformel zu berechnen und dann diese anzuwenden.

i) Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein endlichdimensionaler k-Vektorraum V ist, wie wir gesehen haben, immer isomorph zu einem Vektorraum der Form k^n mit $n = \dim V$; die möglichen Isomorphismen entsprechen genau den verschiedenen Basen von V. Allerdings empfiehlt sich im allgemeinen nicht, den Vektorraum V von vornherein mit k^n zu identifizieren, denn die Freiheit bei der Wahl einer Basis erlaubt bei geschickter Anwendung oftmals beträchtliche Vereinfachungen bei expliziten Rechnungen.

Eigenvektoren einer linearen Abbildung sind Beispiele von Kandidaten für Basisvektoren, bezüglich derer eine lineare Abbildung eine besonders einfache Abbildungsmatrix hat:

Definition: *a)* Ein Vektor $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ heißt *Eigenvektor* der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ zum *Eigenwert* $\lambda \in k$, wenn $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ ist.

b) $\lambda \in k$ heißt *Eigenwert* von φ, falls φ einen Eigenvektor zum Eigenwert λ hat.

Offensichtlich ist mit einem Vektor $\vec{v}$ auch jedes Vielfache (außer dem nach Definition ausgeschlossenen Nullvektor) ein Eigenvektor zum selben Eigenwert; allgemeiner ist sogar jede Linearkombination (außer $\vec{0}$) von Eigenvektoren zum Eigenwert λ wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h. die Eigenvektoren zu einem festen Eigenwert λ bilden zusammen mit dem Nullvektor einen Untervektorraum von V, den sogenannten *Eigenraum* von λ.

Definition: Die Dimension des Eigenraums von λ heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Lemma: Sind $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r \in V$ Eigenvektoren der linearen Abbildung $\varphi: V \to V$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, so sind diese Vektoren linear unabhängig.

Beweis: Angenommen, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ seien linear abhängig. Dann können wir eine Zahl $2 \le s \le r$ finden, so daß zwar $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$ linear abhängig sind, nicht aber $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{s-1}$. Es gibt daher Skalare $\alpha_i \in k$, so daß

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_s\vec{v}_s = \vec{0}$$

ist. Wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Abbildung φ an und beachten, daß $\varphi(\vec{v}_i) = \lambda_i\vec{v}_i$ ist, folgt, daß auch

$$\alpha_1\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_s\lambda_s\vec{v}_s = \vec{0}$$

ist. Andererseits können wir obige Gleichung auch einfach mit λ_s multiplizieren mit dem Ergebnis, daß

$$\lambda_s\alpha_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_s\alpha_s\vec{v}_s = \vec{0}\,.$$

Bei Subtraktion der letzten beiden Gleichungen voneinander fällt der letzte Term auf der linken Seite weg, und wir erhalten eine lineare Abhängigkeit

$$\alpha_1(\lambda_s - \lambda_1)\vec{v}_1 + \cdots + \alpha_{s-1}(\lambda_s - \lambda_{s-1})\vec{v}_{s-1} = \vec{0}$$

zwischen $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{s-1}$. Da diese Vektoren linear unabhängig sind, müssen hier alle Koeffizienten verschwinden. Da die Eigenwerte $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ allesamt verschieden sind, ist dies nur möglich, wenn $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{s-1} = 0$ ist. Wegen $\vec{v}_s \neq \vec{0}$ muß dann aber auch α_s verschwinden, im Widerspruch zur angenommenen linearen Unabhängigkeit von $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s$.

Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ linear unabhängig. ■

Bevor wir zu nichttrivialen Beispielen kommen können, benötigen wir ein Verfahren, um Eigenwerte und Eigenvektoren effektiv zu berechnen. Nach Definition ist $\lambda \in k$ genau dann Eigenwert der linearen Abbildung φ, wenn es dazu einen Eigenvektor gibt, d.h. einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\vec{v}$, so daß $\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ ist. Diese Bedingung wird, wenn man sie bezüglich einer Basis hinschreibt, zu einem linearen Gleichungssystem für die Komponenten von $\vec{v}$: Ist A die Abbildungsmatrix von φ bezüglich der gewählten Basis, haben wir die Gleichung $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ oder $(A - \lambda E)\vec{v} = \vec{0}$, wobei E die $n \times n$-Einheitsmatrix bezeichnet.

In letzterer Form ist dies ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Komponenten von $\vec{v}$; wie jedes homogene lineare Gleichungssystem hat es den Nullvektor als Lösung. Weitere Lösungen gibt es genau dann, wenn die Matrix $A - \lambda E$ des Gleichungssystems singulär ist, d.h. also, wenn $\det(A - \lambda E)$ verschwindet.

Damit ist klar, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen kann: Man löse die Gleichung $\det(A - \lambda E) = 0$ und dann für jede Wurzel λ_i dieser Gleichung das lineare Gleichungssystem $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

Hier ist

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6-\lambda & 7 & 8\\ 8 & 7 & 6-\lambda & 5\\ 4 & 3 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}$$

und nach dem Entwicklungssatz ist (bei Entwicklung nach der ersten Zeile)

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= (1-\lambda)\begin{vmatrix}6-\lambda & 7 & 8\\ 7 & 6-\lambda & 5\\ 3 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &\quad -2\begin{vmatrix}5 & 7 & 8\\ 8 & 6-\lambda & 5\\ 4 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}\\ &\quad +3\begin{vmatrix}5 & 6-\lambda & 8\\ 8 & 7 & 5\\ 4 & 3 & 1-\lambda\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}5 & 6-\lambda & 7\\ 8 & 7 & 6-\lambda\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}\\ &= (1-\lambda)(-\lambda^3+13\lambda^2+35\lambda)-2(5\lambda^2+53\lambda)\\ &\quad +3(-8\lambda^2+\lambda)-4(4\lambda^2-17\lambda)\\ &= \lambda^4-14\lambda^3-72\lambda^2=\lambda^2(\lambda^2-14\lambda-72)\,.\end{aligned}$$

Letzterer Ausdruck verschwindet genau dann, wenn entweder λ verschwindet oder der Klammerausdruck ganz hinten. Letzterer ist eine quadratische Gleichung für λ, die man entweder nach der üblichen Formel lösen kann, oder aber man beachtet den Wurzelsatz von VIÈTE, wonach die Summe der beiden Lösungen 14 und ihr Produkt -72 sein muß; da $72 = 4 \times 18$ ist, können die beiden Lösungen daher nur -4 und 18 sein.

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = 18$; für jeden dieser Eigenwerte müssen wir nun über ein lineares Gleichungssystem die Eigenvektoren bestimmen.

Beginnen wir mit $\lambda_1 = 0$. Hier ist das Gleichungssystem einfach $A\vec{x} = \vec{0}$,

d.h.

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\\ 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4&=0\\ 8x_1+7x_2+6x_3+5x_4&=0\\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4&=0\,.\end{aligned}$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Matrix A ergänzen sich hier die erste und die vierte Gleichung zu

$$5(x_1+x_2+x_3+x_4)=0\,;$$

entsprechend addieren sich die beiden mittleren Gleichungen zu

$$13(x_1+x_2+x_3+x_4)=0\,.$$

Da außerdem noch die Differenz zwischen den ersten beiden Gleichungen gleich

$$4(x_1+x_2+x_3+x_4)=0$$

ist, genügt es, außer der ersten Gleichung noch als einzige weitere Gleichung

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0 \quad \text{oder} \quad x_1=-(x_2+x_3+x_4)$$

zu betrachten. Subtrahiert man diese Gleichung von der ersten oder, was dasselbe ist, setzt man sie ein, so bleibt

$$x_2+2x_3+3x_4=0$$

als einzige Relation zwischen x_2, x_3 und x_4. Das gegebene Gleichungssystem ist also äquivalent zu

$$\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3+4x_4&=0\\ x_2+2x_3+3x_4&=0\,;\end{aligned}$$

insbesondere hat es also den Rang zwei und damit einen Lösungsraum der Dimension $4-2=2$.

Im noch verbliebenen Gleichungssystem kann beispielsweise x_4 beliebig gewählt werden. Ist $x_4 = 0$, so bleibt noch die Relation $x_2 + 2x_3 = 0$ übrig, in der etwa x_3 beliebig gewählt werden kann; danach sind