b) Forderungen an eine allgemeinere Determinante

Wir möchten gerne für beliebige endlichdimensionale Vektorräume V eine Determinantenfunktion nach Art des vorigen Abschnitts definieren, d.h. wir suchen für einen n-dimensionalen Vektorraum V eine Abbildung

$$\det\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ mal}} \to k; \quad (\vec v_1, \dots, \vec v_n) \mapsto \det(\vec v_1, \dots, \vec v_n)$$

mit den Eigenschaften

(D1) $\det(\vec v_1, \dots, \vec v_n)$ ändert ihr Vorzeichen, nicht aber ihren Betrag, wenn irgendwelche zwei ihrer Argumente miteinander vertauscht werden.

(D2) $\det(\vec v_1, \dots, \vec v_n)$ ist linear in jedem ihrer n Argumente.

(D3) $\det(\vec v_1, \dots, \vec v_n) = 0$ genau dann, wenn $\vec v_1, \dots, \vec v_n$ linear abhängig sind.

Um zu zeigen, daß es eine solche Abbildung auch tatsächlich gibt, folgen wir einer auch sonst bei Existenzbeiweisen oftmals nützlichen Strategie: Wir nehmen an, wir *hätten* eine Funktion det mit den Eigenschaften (D1) bis (D3), und versuchen dann, die Funktion aufgrund dieser Eigenschaften möglichst explizit auszurechnen. Dies wird auf eine Formel für det führen, die wir dann als *Definition* nehmen können, wenn wir nachgewiesen haben, daß sie (D1) bis (D3) erfüllt.

Wir nehmen also an, wir hätten eine Funktion det mit den Eigenschaften (D1) bis (D3). Zu ihrer genaueren Untersuchung wählen wir zunächst eine Basis $\{\vec e_1, \dots, \vec e_n\}$ von V; nach Eigenschaft (D3) ist dann $\det(\vec e_1, \dots, \vec e_n) \neq 0$. Über den genauen Wert können uns die drei Bedingungen nichts sagen, denn mit det erfüllt offensichtlich auch jedes skalare Vielfache $\lambda \cdot \det$ mit $\lambda \neq 0$ die Forderungen (D1) bis (D3).

Wir betrachten nun n beliebige Vektoren $\vec v_1, \dots, \vec v_n$ und schreiben diese bezüglich der Basis $\{\vec e_1, \dots, \vec e_n\}$ als Linearkombinationen

$$\vec v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \vec e_j$$

der gewählten Basisvektoren.

Sukzessive Anwendung der Linearitätsregel (D2) auf die n Argumente von det führt auf

$$\begin{aligned}
\det(\vec v_1, \dots, \vec v_n) &= \det\Bigl(\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \vec e_{j_1}, \vec v_2, \dots, \vec v_n\Bigr) \\
&\underset{(D2)}{=} \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \det(\vec e_{j_1}, \vec v_2, \dots, \vec v_n)\,. \\
&= \sum_{j_1=1}^n a_{1j_1} \det\Bigl(\vec e_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n a_{2j_2} \vec e_{j_2}, \vec v_3, \dots, \vec v_n\Bigr) \\
&\underset{(D2)}{=} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \det(\vec e_{j_1}, \vec e_{j_2}, \vec v_3, \dots, \vec v_n) \\
&\quad\vdots \\
&= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_n=1}^n a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot \cdots \cdot a_{nj_n} \det(\vec e_{j_1}, \cdots, \vec e_{j_n})\,.
\end{aligned}$$

Um dies noch weiter ausrechnen zu können, müssen wir die Vektoren $\vec e_{j_\nu}$ in jedem der Summanden in die natürliche Reihenfolge bringen; dabei hilft die Regel (D1). Eine ganze Reihe von Summanden können wir allerdings gleich von vornherein außer Acht lassen, denn nach (D3) ist

$$\det(\vec e_{j_1}, \cdots, \vec e_{j_n}) = 0\,,$$

wenn (mindestens) zwei der $\vec e_{j_\nu}$ übereinstimmen: Falls $\vec e_{j_\nu}$ und $\vec e_{j_\mu}$ übereinstimmen, ist $\vec e_{j_\nu} - e_{j_\mu} = \vec 0$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Ein von Null verschiedener Wert ist also nur möglich, wenn $\{j_1, \dots, j_n\} = \{1, \dots, n\}$ ist, wenn also die Abbildung

$$\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}; \quad \nu \mapsto j_\nu$$

bijektiv ist.

Unsere nächste Aufgabe wird daher sein, solche Abbildungen zu studieren und sie auf Vertauschungen zweier Elemente zurückzuführen, so daß wir schließlich die Summanden mittels (D1) auf $\det(\vec e_1, \dots, \vec e_n)$ zurückführen können.

c) Permutationen

Definition: *a)* Eine Permutation ist eine bijektive Abbildung

$$\pi\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}\,.$$

b) Eine Transposition ist eine Permutation τ, die zwei Elemente von $\{1,\dots,n\}$ vertauscht und den Rest festläßt. Sind i,j die beiden Elemente, die von τ vertauscht werden, so schreiben wir kurz $\tau = (i\ j)$.

c) Die Menge aller Permutationen $\pi\colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ wird als *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$ bezeichnet.

Das Wort *Gruppe* kennen wir bereits aus den Definitionen von Vektorräumen, wo es zumindest am Rande aufgetaucht ist; es wird langsam Zeit, es wirklich zu definieren. Intuitiv versteht man unter einer Gruppe eine Struktur, deren Elemente sich so miteinander verknüpfen lassen, daß die „üblichen“ Rechenregeln gelten – mit Ausnahme, eventuell, des Kommutativgesetzes, denn dieses gilt ja beispielsweise schon bei der Matrixmultiplikation nicht mehr. Die exakte Definition ist die folgende:

Definition: Eine *Gruppe* $(G,\circ)$ besteht aus einer Menge G mit einer inneren Verknüpfung $\circ\colon G\times G\to G$, für die gilt:
1. $g\circ(h\circ k) = (g\circ h)\circ k$ für alle $g,h,k\in G$
2. Es gibt ein *Neutralelement* $e\in G$, so daß für alle $g\in G$ gilt $e\circ g = g\circ e = g$.
3. Zu jedem Element $g\in G$ gibt es ein *inverses Element* $g'\in g$, so daß $g\circ g' = g'\circ g = e$ ist.

Die Gruppe heißt *kommutativ* oder *abelsch,* wenn zusätzlich gilt

4. $g\circ h = h\circ g$ für alle $g,h\in G$.

In diesem Sinne bilden beispielsweise die ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung eine Gruppe, sogar eine abelsche Gruppe, nicht aber die natürlichen Zahlen, denn es gibt beispielsweise keine natürliche Zahl n, so daß $n+2=0$ ist, und auch die Null liegt zumindest nach der in dieser Vorlesung zugrundegelegten Konvention nicht in $\mathbb{N}$. Entsprechend bilden die ganzen Zahlen bezüglich der *Multiplikation* keine Gruppe, da die Gleichung $5x = 1$ in $\mathbb{Z}$ nicht lösbar ist, aber die

positiven rationalen Zahlen bilden eine multiplikative Gruppe. Die rationalen Zahlen bilden keine, da $0x = 1$ unlösbar ist, aber die rationalen Zahlen ohne Null sind eine multiplikative Gruppe, genauso auch die *invertierbaren* $n\times n$-Matrizen.

Kommutative Gruppen werden meist als *abelsch* bezeichnet zu Ehren des norwegischen Mathematikers NILS HENRIK ABEL (1802–1829), der bei seinen Untersuchungen über Integrale algebraischer Funktionen auf solche Gruppen stieß. Diese heute nach ihm benannten *abelschen Integrale* treten beispielsweise auf bei der Berechnung der Bogenlänge auf einer Ellipse; die von ABEL gefundenen Gruppen spielen heute eine wichtige Rolle in der Kryptographie. 1824 bewies er mit Hilfe von Permutationen (die, wie wir gleich sehen werden, *nichtabelsche* Gruppen bilden), daß Gleichungen fünften Grades im allgemeinen nicht durch Wurzelausdrücke gelöst werden können.

Da wir die Menge aller Permutationen als *symmetrische Gruppe* bezeichnen, sollten auch diese eine Gruppe bilden.

Die Gruppenoperation ist natürlich die Hintereinanderausführung von Abbildungen, das Produkt zweier Permutationen π und ω ist also die Abbildung $\pi\circ\omega$, die eine Zahl i abbildet auf $(\pi\circ\omega)(i) = \pi\bigl(\omega(i)\bigr)$.

Die Assoziativität der Verknüpfung ist, wie stets bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen, klar; Einselement ist die identische Permutation, und Inverse gibt es, da eine Permutation nach Definition bijektiv ist und somit eine Umkehrabbildung hat. Speziell für Transpositionen ist die Bestimmung dieser Umkehrabbildung besonders einfach: Da eine Transposition nicht anderes tut, als zwei Elemente miteinander zu vertauschen, macht sie sich selbst rückgängig und ist somit ihr eigenes Inverses.

Wie meist bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen ist auch bei Permutationen das Kommutativgesetz nicht erfüllt; beispielsweise ist

$$(1\ 2)\circ(1\ 3) = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} \quad\text{und}\quad (1\ 3)\circ(1\ 2) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\,,$$

wobei die Matrixdarstellung einer Permutation einfach bedeuten soll, daß jedes Element aus der ersten Zeile auf das darunterstehende abgebildet wird. (Multiplizieren kann man zwei solche Matrizen natürlich nicht; es geht hier nicht um eine Abbildungsmatrix, sondern einfach um eine in Matrixform hingeschriebene Tabelle.)

Aus der Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$$

einer Permutation läßt sich leicht die Anzahl möglicher Permutationen von n Elementen ablesen: Füllen wir die untere Zeile von links aus systematisch auf, so gibt es für $\pi(1)$ noch die volle Auswahl unter allen n Elementen, für $\pi(2)$ kommen alle Elemente in Frage *außer* $\pi(1)$, also nur noch $n-1$ Stück, für $\pi(3)$ gibt es entsprechend nur noch $n-2$, bis es schließlich bei $\pi(n)$ überhaupt nichts mehr zu wählen gibt, denn $\pi(n)$ ist die einzige Zahl, die bis dahin noch nicht in der zweiten Zeile der Matrix steht. Insgesamt gibt es also

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Permutationen von $\{1, \dots, n\}$, die symmetrische Gruppe $\mathfrak{S}_n$ enthält somit $n!$ Elemente.

Für die Anwendung von Regel (D1) auf die weitere Berechnung von Determinanten ist der folgende Satz wichtig:

Satz: Jede Permutation π kann als Produkt

$$\pi = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$$

von Transpositionen geschrieben werden.

Beweis: Da es sich hier um eine Mathematikvorlesung für (technische) Informatiker handelt, möchte ich sowohl einen mathematischen als auch einen informatischen Beweis geben.

Der einfachste mathematische Beweis benutzt vollständige Induktion nach der Elementanzahl n der zu permutierenden Menge. Für $n = 1$ gibt es keine Permutation außer der Identität, die man als leeres Produkt von Transpositionen betrachten kann; da aber nicht jeder diese Art von logischen Taschenspielertricks liebt, betrachten wir zur Vorsicht auch noch den Fall $n = 2$ als weitere Verankerung der Induktion.

Hier gibt es genau zwei Permutationen: Die Identität, die alles festläßt, und die Vertauschung der beiden Elemente. Letzere ist eine Transposition, erstere kann wieder als leeres Produkt von Transpositionen betrachtet werden oder, falls man das nicht möchte, als Quadrat der Vertauschung, denn nach zweimaligem Vertauschen ist wieder alles beim alten.

Beim *Induktionsschritt* nehmen wir an, wir hätten den Satz für Permutationen $(n-1)$-elementiger Mengen bewiesen und betrachten nun eine Permutation

$$\pi\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}\,.$$

Für diese gibt es ein Element $i \in \{1, \dots, n\}$, so daß $\pi(i) = n$ ist, denn π ist ja bijektiv. Die Permutation

$$\pi' = \pi \circ (i\ n)$$

bildet n ab auf

$$\pi'(n) = \big(\pi \circ (i\ n)\big)(n) = \pi\big((i\ n)(n)\big) = \pi(i) = n\,,$$

d.h. n bleibt fest. Da π' bijektiv ist, muß es daher auch die Menge $\{1, \dots, n-1\}$ auf sich selbst abbilden; wenn wir n ignorieren, können wir π' daher auch als eine Permutation von $\{1, \dots, n-1\}$ auffassen. Von der wissen wir, daß sie als Produkt

$$\pi' = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$$

von Transpositionen darstellbar ist. Wegen $\pi' = \pi \circ (i\ \ n)$ und weil Transpositionen zu sich selbst invers sind, ist damit auch

$$\pi = \pi' \circ (i\ n) = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r \circ (i\ n)$$

als Produkt von Transpositionen darstellbar, und damit ist der Satz einmal bewiesen.

Zum zweiten Beweis auf Grundlage der Informatik beachten wir, daß jeder gängige Sortieralgorithmus, der auf Vertauschungen der Elemente beruht (und das tut fast jeder) ein konstruktives Verfahren liefert, um

Permutationen als Produkte von Transpositionen zu schreiben: Soll etwa π zerlegt werden, so sortiere man durch fortgesetztes Vertauschungen zweier Zahlen die Folge

$$\pi(1),\ \pi(2),\ \pi(3),\ \ldots,\pi(n-1),\ \pi(n)$$

der Größe nach; die erste angewandte Transposition sei τ_1, die letzte τ_n. Da die sortierte Folge der $\pi(i)$ gerade gleich der Folge $1,\ldots,n$ ist, ist daher für jedes i

$$(\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \pi)(i) = i\,,$$

d.h.

$$\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1 \circ \pi = \text{Identität}\,.$$

Multipliziert man beide Seiten von links mit $\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r$, so folgt

$$\pi = \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r\,,$$

denn

$$\begin{aligned}
&(\tau_1 \circ \cdots \circ \tau_r) \circ (\tau_r \circ \cdots \circ \tau_1)\\
&= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-1} \circ (\tau_r \circ \tau_r) \circ \tau_{r-1} \circ \cdots \circ \tau_1\\
&= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-2} \circ (\tau_{r-1} \circ \tau_{r-1}) \circ \tau_{r-2} \circ \cdots \circ \tau_1\\
&= \tau_1 \circ \cdots \circ \tau_{r-3} \circ (\tau_{r-2} \circ \tau_{r-2}) \circ \tau_{r-3} \cdots \circ \tau_1\\
&= \cdots = \tau_1 \circ (\tau_2 \circ \tau_2) \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_1 = \text{Identität}\,,
\end{aligned}$$

Also ist π als Produkt der Transpositionen τ_1 bis τ_r darstellbar. ■

Ein Leser, der bereits mit den gebräuchlichen Sortierverfahren vertraut ist, wird unschwer erkennen, daß der „mathematische“ Beweis ein Spezialfall des informatischen ist, wobei als Sortierverfahren ein relativ einfaches $O(n^2)$-Verfahren benutzt wurde – das aber zumindest für einstellige n den meisten „besseren“ Sortierverfahren überlegen sein dürfte; die beiden Beweise unterscheiden sich also nicht sonderlich.

Die Anzahl n der benötigten Vertauschungen hängt natürlich von der Effiziens des gewählten Sortierverfahrens ab; die Darstellung von π als Produkt von Transpositionen ist also alles andere als eindeutig. Da wir für die Determinantenberechnung vor allem wissen müssen, ob die Abzahl der Vertauschungen gerade oder ungerade ist, wollen wir uns als nächstes davon überzeugen, daß wenigstens die Parität der Anzahl r der benötigten Transpositionen eindeutig bestimmt ist, d.h. r ist für gegebenes π entweder immer gerade oder immer ungerade.

Dazu definieren wir für jede Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ein Vorzeichen:

Definition: Das *Vorzeichen* der Permutation $\pi \in \mathfrak{S}_n$ ist die Zahl

$$\varepsilon(\pi) \underset{\text{def}}{=} \prod_{\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n\}} \frac{\pi(j)-\pi(i)}{j-i}\,,$$

wobei das Produkt über die sämtlichen zweielementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ genommen wird.

$\varepsilon(\pi)$ ist wirklich ein Vorzeichen, das heißt gleich ± 1, denn

$$|\varepsilon(\pi)| = \frac{\prod\limits_{\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n\}} |\pi(j)-\pi(i)|}{\prod\limits_{\{i,j\}\subset\{1,\ldots,n\}} |j-i|} = 1\,,$$

weil mit $\{i,j\}$ wegen der Bijektivität von π auch $\{\pi(i),\pi(j)\}$ die sämtlichen zweielementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ durchläuft, so daß im Zähler und Nenner bis auf Reihenfolge genau dieselben Faktoren stehen.

Für eine Transposition $\tau = (k\ \ell)$ ist

$$\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} = \frac{j-i}{j-i} = 1 \quad \text{falls} \quad \{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset\,,$$

da $(k\ \ell)$ alle Zahlen außer k und ℓ festläßt. Die Zahlen k und ℓ werden vertauscht, daher ist

$$\frac{\tau(k)-\tau(\ell)}{k-\ell} = \frac{\ell-k}{k-\ell} = -1\,.$$

Bleibt noch der Fall, daß eine der beiden Zahlen i oder j gleich k oder ℓ ist; da wir zweielementige *Mengen* betrachten und $\{i,j\} = \{j,i\}$ ist, können wir vereinbaren, daß diese Zahl i sein soll.

Ist $i = k$, so ist das Produkt der Terme für $\{k,j\}$ und $\{\ell,j\}$ gleich

$$\frac{\tau(k)-\tau(j)}{k-j} \cdot \frac{\tau(\ell)-\tau(j)}{\ell-j} = \frac{\ell-j}{k-j} \cdot \frac{k-j}{\ell-j} = +1\,;$$

und genau entsprechend kann man auch für $i = \ell$ argumentieren.

Bildet man daher das Produkt über alle zweielementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$, so erhält man $\varepsilon(\tau) = -1$ und damit das

Lemma: Das Vorzeichen einer Transposition ist -1. ■

Der Zusammenhang zwischen dem Vorzeichen und der Transpositionsdarstellung einer Permutation ergibt sich aus

Lemma: Für zwei Permutationen $\pi,\pi' \in \mathfrak{S}_n$ ist

$$\varepsilon(\pi\circ\pi') = \varepsilon(\pi)\cdot\varepsilon(\pi')\,.$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\begin{aligned}\varepsilon(\pi\circ\pi') &= \prod_{\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\}} \frac{(\pi\circ\pi')(j)-(\pi\circ\pi')(i)}{j-i}\\ &= \prod_{\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\}} \frac{\pi\bigl(\pi'(j)\bigr)-\pi\bigl(\pi'(i)\bigr)}{j-i}\,.\end{aligned}$$

Nach Erweiterung mit

$$\prod_{\{i,j\}\subset\{1,\dots,n\}} \frac{\pi'(j)-\pi'(i)}{\pi'(j)-\pi'(i)}$$

und Umordnung wird dies zu

$$\varepsilon(\pi\circ\pi') = \prod_{\{i,j\}} \frac{\pi\bigl(\pi'(j)\bigr)-\pi\bigl(\pi'(i)\bigr)}{\pi'(j)-\pi'(i)}\cdot\prod_{\{i,j\}}\frac{\pi'(j)-\pi'(i)}{j-i}\,.$$

Das zweite dieser Produkte ist natürlich $\varepsilon(\pi')$, und das erste ist $\varepsilon(\pi)$, da mit $\{i,j\}$ auch $\{\pi'(i),\pi'(j)\}$ die sämtlichen zweielementigen Teilmengen von $\{1,\dots,n\}$ durchläuft. ■

Sind nun

$$\pi = \tau_1\circ\cdots\circ\tau_r = \sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_s$$

zwei Darstellungen einer Permutation π als Produkt von Transpositionen, so ist nach den gerade bewiesenen Lemmata einerseits

$$\varepsilon(\pi) = \prod_{i=1}^{r}\varepsilon(\tau_i) = (-1)^r,$$

andererseits aber auch

$$\varepsilon(\pi) = \prod_{i=1}^{s}\varepsilon(\sigma_i) = (-1)^s,$$

also muß $(-1)^r = (-1)^s$ sein und damit r,s entweder beide gerade oder beide ungerade.

Definition: Eine Permutation $\pi\in\mathfrak{S}_n$ heißt *gerade,* wenn sie als Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann, ansonsten heißt sie *ungerade.*

Das Vorzeichen $\varepsilon(\pi)$ von π ist also $+1$ für gerades π und -1 für ungerades.

d) Existenz von Determinanten

Nach diesem Einschub über Permutationen und Transpositionen haben wir das nötige Rüstzeug, um die Rechnung aus Abschnitt *b)* zu Ende zu führen:

Da die Determinante bei jeder Vertauschung zweier Elemente ihr Vorzeichen wechselt, folgt sofort aus den obigen Betrachtungen, daß für jede Permutation $\pi\in\mathfrak{S}_n$ gilt

$$\det\bigl(\vec e_{\pi(1)},\dots,\vec e_{\pi(n)}\bigr) = \begin{cases} +\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n) & \text{falls } \pi \text{ gerade}\\ -\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n) & \text{falls } \pi \text{ ungerade}\end{cases},$$

d.h. $\det\bigl(\vec e_{\pi(1)},\dots,\vec e_{\pi(n)}\bigr) = \varepsilon(\pi)\cdot\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n)$. Wenn wir die Rechnung aus Abschnitt *b)* fortführen, erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr) &= \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\cdot\det\bigl(\vec e_{\pi(1)},\dots,\vec e_{\pi(n)}\bigr)\\ &= \Biggl(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\Biggr)\cdot\det\bigl(\vec e_1,\dots,\vec e_n\bigr)\,.\end{aligned}$$

Somit ist $\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n)$ eindeutig bestimmt bis auf den Wert von $\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n)$; falls es überhaupt Determinanten gibt, müssen sie also so aussehen. Wir definieren daher

Definition: Die Determinante von n Vektoren

$$\vec v_1 = a_{11}\vec e_1 + \cdots + a_{1n}\vec e_n, \quad \dots, \quad \vec v_n = a_{n1}\vec e_1 + \cdots + a_{nn}\vec e_n$$

des n-dimensionalen Vektorraums V bezüglich der Basis $\vec e_1,\dots,\vec e_n$ ist

$$\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n) = \sum_{\pi\in\mathfrak S_n} \varepsilon(\pi) a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}\,.$$

Insbesondere ist also $\det(\vec e_1,\dots,\vec e_n) = 1$.

Satz: Die so definierte Determinante hat die Eigenschaften (D1) bis (D3).

Beweis: Beginnen wir mit (D1), d.h. die Determinante wechselt ihr Vorzeichen, wenn zwei der Argumente vertauscht werden. Vertauscht man etwa die Argumente $\vec v_i$ und $\vec v_j$, so werden anstelle der Summanden

$$\varepsilon(\pi)\, a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{j\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)}$$

die Summanden

$$\varepsilon(\pi)\, b_{1\pi(1)}\cdots b_{j\pi(j)}\cdots b_{i\pi(i)}\cdots b_{n\pi(n)}$$

aufaddiert, wobei

$$b_{k\ell} = \begin{cases} a_{k\ell} & \text{falls } k \neq i,j \\ a_{j\ell} & \text{falls } k = i \\ a_{i\ell} & \text{falls } k = j \end{cases}$$

ist. Die Summanden sind also

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\pi)\, a_{1\pi(1)}\cdots a_{j\pi(i)}\cdots a_{i\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)} \\ = {}&\varepsilon(\pi)\, a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(j)}\cdots a_{j\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)} \\ = {}&\varepsilon(\pi)\, a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)} \end{aligned}$$

mit

$$\pi'(k) = \begin{cases} \pi(k) & \text{falls } k \neq i,j \\ \pi(j) & \text{falls } k = i \\ \pi(i) & \text{falls } k = j\,, \end{cases}$$

d.h. $\pi' = \pi\circ(i\ j)$. Als Produkt von Transpositionen geschrieben hat π' also einen Faktor mehr als π; falls π ungerade war, ist daher π' gerade, und umgekehrt. Somit ist

$$\varepsilon(\pi') = -\varepsilon(\pi)$$

und damit lassen sich die Summanden auch schreiben als

$$-\varepsilon(\pi')\, a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)}\,.$$

Summiert man über alle $\pi' \in \mathfrak S_n$, ist also

$$\begin{aligned} &\det(\vec v_1,\dots,\vec v_j,\dots,\vec v_i,\dots,\vec v_n) \\ &= \sum_{\pi'\in\mathfrak S_n} \big(-\varepsilon(\pi')\big)\, a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)} \\ &= -\sum_{\pi'\in\mathfrak S_n} \varepsilon(\pi')\, a_{1\pi'(1)}\cdots a_{i\pi'(i)}\cdots a_{j\pi'(j)}\cdots a_{n\pi'(n)} \\ &= -\det(\vec v_1,\dots,\vec v_i,\dots,\vec v_j,\dots,\vec v_n)\,, \end{aligned}$$

womit (D1) bewiesen wäre.

Eigenschaft (D2), die Linearität in jedem der Argumente, ist klar, denn jedes der Monome $a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}$ enthält *genau eine* Komponente des Vektors $\vec v_i$ und ist damit linear in $\vec v_i$.

Bleibt noch (D3), d.h. $\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n)$ soll genau dann verschwinden, wenn die $\vec v_i$ linear abhängig sind.

Sind zunächst die Vektoren $\vec v_1,\dots,\vec v_n$ linear abhängig, so läßt sich einer von ihnen als Linearkombination der anderen schreiben; durch Umordnen (wobei die Determinante nach der schon bewiesenen Eigenschaft (D1) höchstens ihr Vorzeichen ändert) können wir annehmen, daß dies etwa $\vec v_1$ sei; wir setzen

$$\vec v_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i \vec v_i\,.$$

Dann ist

$$\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr) = \det\left(\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\vec v_i,\vec v_2,\dots,\vec v_n\right) \underset{(D2)}{=} \sum_{i=2}^{n}\lambda_i\det\bigl(\vec v_i,\vec v_2,\dots,\vec v_n\bigr)\,.$$

Im i-ten Summanden der letzten Summe tritt der Vektor $\vec v_i$ zweimal als Argument von det auf: Einmal an der ersten, und dann noch an der i-ten. Vertauscht man diese beiden (gleichen) Argumente, ändert sich natürlich nichts; andererseits haben wir aber bereits (D1) bewiesen, wonach sich beim Vertauschen irgend zweier Argumente das Vorzeichen ändert. Der i-te Summand hat also einen Wert s_i, für den $s_i = -s_i$ ist. Falls wir mit reellen Zahlen arbeiten, folgt hieraus natürlich sofort, daß alle s_i verschwinden und somit auch ihre Summe.

Für beliebige Körper gilt das aber leider nicht: Aus $s_i = -s_i$ folgt, wenn wir auf beiden Seiten s_i addieren, zunächst nur, daß

$$s_i + s_i = (1+1)s_i = 0$$

ist, und daraus folgt genau dann, daß auch $s_i = 0$ ist, wenn $1+1\neq 0$ ist. Dies ist aber beispielweise in dem für die digitale Informationsverarbeitung wichtigen Körper $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ nicht der Fall; wir müssen uns also mit Rücksicht auf diesen (und eine ganze Reihe anderer) Körper noch überlegen, daß wirklich immer

$$\det(\vec v_1,\dots,\vec v_n) = 0$$

ist, wenn zwei der Argumente $\vec v_i$ übereinstimmen.

Dazu beachten wir, daß im Falle $\vec v_i = \vec v_j$ auch für alle ℓ die Koeffizienten $a_{i\ell}$ und $a_{j\ell}$ übereinstimmen, d.h. in der Summe

$$\det A = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{j\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)}$$

ist stets

$$a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(i)}\cdots a_{j\pi(j)}\cdots a_{n\pi(n)} = a_{1\pi(1)}\cdots a_{i\pi(j)}\cdots a_{j\pi(i)}\cdots a_{n\pi(n)}\,.$$

Hier ist die rechte Seite gerade der Summand zur Permutation $\pi\circ(i\ j)$, die genau dann gerade ist, wenn π ungerade ist, und umgekehrt. Also haben beide Terme verschiedenes Vorzeichen und heben sich gegenseitig weg; die Summe über alle Permutationen ist also Null.

Also verschwindet die Determinante unabhängig vom Grundkörper immer dann, wenn die Vektoren linear abhängig sind.

Nun seien $\vec v_1,\dots,\vec v_n$ linear unabhängig; für dieses Fall müssen wir zeigen, daß die Determinante *nicht* verschwindet. Wir wissen, daß für die Basisvektoren $\vec e_1,\dots,\vec e_n$

$$\det\bigl(\vec e_1,\dots,\vec e_n\bigr) = 1\neq 0$$

ist; außerdem wissen wir, daß n beliebige linear unabhängige Vektoren eines n-dimensionalen Vektorraums eine Basis bilden.

Daher können wir die $\vec e_i$ als Linearkombinationen der $\vec v_j$ schreiben, etwa als

$$\vec e_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\vec v_j\,.$$

Nun können wir die Rechnungen des letzten Paragraphen wörtlich wiederholen, nur daß dieses Mal $\vec v_1,\dots,\vec v_n$ die Basisvektoren sind und $\vec e_1,\dots,\vec e_n$ die Vektoren, für die wir det berechnen möchten. Wir wissen zwar noch nicht, daß $\det\bigl(\vec e_1,\dots,\vec e_n\bigr)$ nicht verschwindet, aber das haben wir in der dortigen Rechnung auch nie verwendet; alles hing nur ab von den bereits bewiesenen Forderungen (D1) und (D2) und der ebenfalls schon bewiesenen Tatsache, daß det verschwindet, wenn zwei der Argumente gleich sind. Somit erhalten wir die Formel

$$\det\bigl(\vec e_1,\dots,\vec e_n\bigr) = \left(\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)b_{1\pi(1)}\cdots b_{n\pi(n)}\right)\cdot\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr)\,.$$

In dieser Gleichung steht links die Zahl eins, also kann keiner der beiden Faktoren auf der rechten Seite verschwinden; insbesondere ist $\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_n\bigr)\neq 0$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

Fassen wir zusammen, was wir bislang in diesem Paragraphen gemacht haben:

- Wir haben anhand des Beispiels von Determinanten im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ drei zentrale Forderungen an eine allgemeine Determinante aufgestellt.
- Unter der Annahme, daß es Funktionen gibt, die diese drei Forderungen erfüllen, haben wir ausgerechnet, wie solche Funktionen aussehen müssen; inbsbesondere haben wir gesehen, daß sie durch ihren Wert auf den Vektoren einer Basis eindeutig bestimmt sind.
- Dann haben wir die so erhaltene explizite Formel als *Definition* einer allgemeinen Determinanten genommen und gezeigt, daß die so definierte Funktion tatsächlich die drei Forderungen erfüllt.

Insgesamt haben wir also gesehen, daß es Funktionen gibt, die den drei Forderungen (D1) bis (D3) genügen und daß solche Funktionen bis auf eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt sind.

e) Die Determinante einer Matrix

Definition: Unter der Determinante einer Matrix $A \in k^{n\times n}$ verstehen wir die Determinante ihrer Spaltenvektoren; ist also

$$A = (a_{ij}) \quad \text{und} \quad \vec{v}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

so ist

$$\det A \underset{\text{def}}{=} \det\bigl(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\bigr) .$$

Wir schreiben auch kurz

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Um etwas Übung im Umgang mit Determinanten zu bekommen, wollen wir dies für kleine n explizit ausrechnen:

Der Fall $n = 1$ einer 1×1-Matrix ist natürlich völlig uninteressant: Die einzige Permutation einer einelementigen Menge ist die Identität, die für jedes n gerade ist, d.h. für $A = (a) \in k^{1\times 1}$ ist $\det A = a$. Die Schreibweise $\det A = |a|$ ist hier irreführend, da es zumindest für $k = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ zu Verwechslungen mit der Betragsfunktion kommen kann. Wegen der geringen Bedeutung von 1×1-Matrizen und ihren Determinanten ist dies jedoch nicht weiter schlimm.

Für $n = 2$ gibt es zwei Permutationen: Die (gerade) Identität und die (ungerade) Transposition (1 2). Nach Definition der Determinanten ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} ,$$

wie beim bereits in Abschnitt *a)* betrachtete Kreuzprodukt von Vektoren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix}$$

.

Für $n = 3$ gibt es bereits $3! = 6$ Permutationen, darunter natürlich die (gerade) Identität.

Jede weitere Permutation kann höchstens ein Element festlassen, denn würde sie zwei festlassen, müßte wegen der Bijektivität der Abbildung auch das dritte auf sich selbst abgebildet werden, wir hätten also die Identität.

Falls ein Element festgehalten wird, bleibt einer nichtidentischen Permutation daher nichts anderes übrig, als die beiden anderen zu vertauschen; dies führt auf die drei (ungeraden) Transpositionen (2 3), (1 3) und (1 2).

Falls kein Element auf sich selbst abgebildet wird, muß die Eins entweder auf 2 oder auf 3 abgebildet werden. Im ersten Fall geht dann 2 auf 3, denn sonst müßte zwei entweder festbleiben oder wir hätten die Transposition (1 2), die drei auf sich selbst abbildet. Wegen der Bijektivität der Abbildung gibt es dann keine andere Möglichkeit als daß drei auf eins abgebildet wird; wir haben also die zyklische Vertauschung

$$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1 .$$

Diese Permutation ist gerade, denn sie läßt sich beispielsweise als Produkt (1 3)(1 2) zweier Transpositionen schreiben: Wenden wir dieses Produkt an auf 1, so wird die Eins zunächst von (1 2) auf zwei abgebildet, und zwei bleibt fest unter (1 3), so daß insgesamt eins auf zwei abgebildet wird, wie verlangt.

Zwei wird von (1 2) auf die Eins abgebildet, und die wiederum von (1 3) auf drei, also haben wir auch hier insgesamt das richtige Ergebnis. Drei schließlich kann dann wegen der Bijektivität von (1 3)(1 2) nur auf eins abgebildet werden, was man auch schnell direkt sieht, denn (1 2) läßt die Drei unverändert, während (1 3) sie auf eins abbildet.

Die noch verbleibende Permutation bildet eins auf drei und daher drei auf zwei ab, sie ist also die zyklische Vertauschung

$$1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \quad \text{oder} \quad 3 \mapsto 2 \mapsto 1 \mapsto 3\,,$$

d.h. die Umkehrabbildung zur gerade betrachteten Permutation. Daher ist sie als Produkt von Transpositionen gleich

$$\bigl((1\ 2)(1\ 3)\bigr)^{-1} = (1\ 3)^{-1}(1\ 2)^{-1} = (1\ 3)(1\ 2)$$

und somit auch gerade.

Zur Berechnung der Determinanten einer 3×3-Matrix (a_{ij}) beginnen wir mit den geraden Permutationen: Die Identität liefert den Term $a_{11}a_{22}a_{33}$, d.h. das Produkt der drei Diagonalelemente, die zyklische Vertauschung $1 \to 2 \to 3 \to 1$ liefert das Produkt $a_{12}a_{23}a_{31}$, und ihr Inverses $a_{13}a_{21}a_{32}$.

Die drei Transpositionen führen auf die negativ zu nehmenden Produkte $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{22}a_{31}$ und $a_{12}a_{21}a_{33}$, insgesamt ist also

$$\begin{aligned}\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}\,.\end{aligned}$$

Diese Formel läßt sich leicht merken nach der Regel von PIERRE SARRUS (1798–1861): Schreibt man die Einträge der Matrix in der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \searrow & & \times & & \times & & \swarrow & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \swarrow & & \times & & \times & & \searrow & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array},$$

so sind die Produkte entlang der drei schrägen Linien von links oben nach rechts unten, der Hauptdiagonalen und ihrer Parallelen also, positiv zu rechnen und die entlang der drei schrägen Linien von rechts oben nach links unten negativ.

Für die Determinanten von 4×4-Matrizen gibt es keine entsprechende Regel mehr; da dann bereits $4! = 24$ Summanden berücksichtigt werden müssen, eignet sich die Formel aus der Definition der Determinanten nicht mehr gut zur Berechnung, von noch größeren Matrizen ganz zu schweigen: Wie aus der *Analysis I* oder der *Praktischen Informatik* bekannt, ist $\log n! \approx n \log n$, d.h. die Anzahl $n!$ der Summanden wächst mit größer werdendem n noch schneller als die Exponentialfunktion.

Wir werden im folgenden daher auf Verfahren hinarbeiten, die es erlauben, auch größere Determinanten mit vertretbarem Aufwand zu berechnen. Das erste dieser Verfahren ist vor allem für mittelgroße Werte von n geeignet und ab etwa $n = 3$ der definierenden Formel vorzuziehen:

f) Der Entwicklungssatz von Laplace

Hier geht es um ein Berechnungsverfahren, das die definierenden Eigenschaften der Determinante ausnutzt, die „Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte“. Bevor wir es herleiten, wollen wir uns zunächst überlegen, daß Zeilen und Spalten bei Determinanten im wesentlichen gleichwertig sind. Dazu führen wir zu einer Matrix A eine neue Matrix ${}^tA$ ein, deren Spalten genau die Zeilen von A sind und umgekehrt:

Definition: Die *transponierte Matrix* zur $n \times m$-Matrix $A = (a_{ij})$ ist die $m \times n$-Matrix ${}^tA = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}$.

Beispielsweise ist also

$$^t\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad {}^t\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix}.$$

Im Fall einer $n\times n$-Matrix ist die transponierte Matrix einfach die an der Hauptdiagonalen gespiegelte Matrix, und allgemein sind die Spaltenvektoren der transponierten Matrix gerade die Zeilenvektoren der ursprünglichen Matrix und umgekehrt.

Lemma: Für jede $n\times n$-Matrix A ist $\det A=\det {}^tA$.

Beweis: Nach Definition ist für $A=(a_{ij})$

$$\det A=\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{1\pi(1)}\cdots a_{n\pi(n)}$$

und

$$\det {}^tA=\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{\pi(1)1}\cdots a_{\pi(n)n}\,.$$

Ordnet man die Faktoren des Produkts $a_{\pi(1)1}\cdots a_{\pi(n)n}$ nach dem ersten Index, so erhält man

$$a_{\pi(1)1}\cdots a_{\pi(n)n}=a_{1\pi^{-1}(1)}\cdots a_{1\pi^{-1}(n)}$$

und damit

$$\det {}^tA=\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n}\varepsilon(\pi)a_{1\pi^{-1}(1)}\cdots a_{1\pi^{-1}(n)}\,.$$

Da mit π auch π^{-1} die gesamte Gruppe $\mathfrak{S}_n$ durchläuft und $\varepsilon(\pi)=\varepsilon(\pi^{-1})$ ist, stimmt die Summe dieser Terme mit der aus der Formel für $\det A$ überein, die beiden Determinanten sind also gleich. ■

Für Leser, denen nicht klar ist, warum $\varepsilon(\pi)$ und $\varepsilon(\pi^{-1})$ gleich sind, seien zur Übung des Umgangs mit Permutationen hier kurz zwei Beweise angegeben: Am einfachsten sieht man diese Formel aufgrund des obigen Lemmas, wonach für zwei beliebige Permutationen π und π' gilt: $\varepsilon(\pi\circ\pi')=\varepsilon(\pi)\cdot\varepsilon(\pi')$. Setzt man hier $\pi'=\pi^{-1}$, so folgt

$$1=\varepsilon(\text{Identität})=\varepsilon(\pi)\cdot\varepsilon(\pi^{-1})\,,$$

so daß die beiden Vorzeichen gleich sein müssen.

Alternativ können wir uns auch explizit überlegen, daß sich π^{-1} als Produkt von r Transpositionen schreiben läßt, falls dies für π der Fall ist; genauer gilt: Ist $\pi=\tau_1\circ\cdots\circ\tau_r$, so ist $\pi^{-1}=\tau_r\circ\cdots\circ\tau_1$, denn wie wir bereits im Abschnitt über Permutationen gesehen haben, ist

$$\pi\circ(\tau_r\circ\cdots\circ\tau_1)=(\tau_1\circ\cdots\circ\tau_r)\circ(\tau_r\circ\cdots\circ\tau_1)=\text{Identität}\,,$$

da jede Transposition zu sich selbst invers ist.

Aus obigem Lemma folgt insbesondere, daß man die Determinante einer Matrix auch als Determinante der Zeilenvektoren definieren kann und daß die Spaltenvektoren einer Matrix genau dann linear unabhängig sind, wenn es die Zeilenvektoren sind. Mit nur wenig mehr Aufwand könnte man sogar zeigen, daß der im Zusammenhang mit der Lösung linearer Gleichungssysteme definierte *Rang* einer Matrix genausogut über Zeilen- wie über Spaltenoperationen berechnet werden kann.

Für die Entwicklung einer Matrix nach beispielsweise nach der j-ten Spalte schreiben wir den j-ten Spaltenvektor

$$\vec v_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}$$

als Linearkombination der Einheitsvektoren

$$\vec e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \vec e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad\dots\quad \vec e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

d.h. als

$$\vec v_j=a_{1j}\vec e_1+\cdots+a_{nj}\vec e_n\,.$$

Dann ist wegen der Linearität der Determinante in ihrem j-ten Argument

$$\begin{aligned}\det A&=\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec v_j,\dots,\vec v_n\bigr)=\det\Bigl(\vec v_1,\dots,\sum_{i=1}^n a_{ij}\vec e_i,\dots,\vec v_n\Bigr)\\&=\sum_{i=1}^n a_{ij}\det\bigl(\vec v_1,\dots,\vec e_i,\dots,\vec v_n\bigr)\,.\end{aligned}$$

Um daraus die Determinante von A zu berechnen, müssen wir die Determinanten

$$D_{ij} \underset{\text{def}}{=} \det\bigl(\vec{v}_1, \ldots, \vec{e}_i, \ldots, \vec{v}_n\bigr)$$

kennen, wobei $\vec{e}_i$ an der j-ten Stelle steht.

Dazu wenden wir die definierende Formel an: In den Produkten $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ ist für die gewählte Stelle j, an der wir den Vektor $\vec{e}_i$ eingefügt haben, $a_{j\ell} = 0$ für $\ell \neq i$ und $a_{ji} = 1$. Also verschwindet $a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}$ für jede Permutation π mit $\pi(j) \neq i$.

Am einfachsten läßt sich dies im Fall $i = j = n$ weiter ausrechnen: Dann müssen wir nur Permutationen mit $\pi(n) = n$ betrachten, und die entsprechen eineindeutig den Permutationen auf der Menge aller Zahlen von 1 bis $n-1$; was übrigbleibt ist also (wegen $a_{nn} = 1$) gerade die Determinante jener $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichung der letzten Spalte und der letzten Zeile aus A entsteht.

Der allgemeine Fall läßt sich durch Vertauschungen darauf zurückführen: Wir können zwar nicht einfach die j-te Spalte mit der n-ten vertauschen, denn dann steht ja die n-te Spalte an j-ter Stelle, aber wir können die j-te Spalte durch sukzessive Vertauschung mit ihrem rechten Nachbarn immer weiter nach außen bringen: Wir vertauschen zunächst die j-te Spalte mit der $(j+1)$-ten, dann die neue $(j+1)$-te (=alte j-te) Spalte mit der $(j+2)$-ten *usw.,* bis schließlich die alte j-te Spalte an n-ter Stelle steht, ohne daß sich vor oder nach der Stelle j irgendetwas an der relativen Reihenfolge der Spalten geändert hätte. Die Anzahl der dazu notwendigen Vertauschungen ist $(n-j)$, die Determinante wurde bei der gesamten Prozedur also mit $(-1)^{n-j}$ multipliziert.

Als nächstes müssen wir auch noch die i-te Zeile nach unten bringen; dazu verwenden wir die gerade gezeigte Formel $\det A = \det {}^tA$. Die i-te Zeile von A ist gleich der i-ten Spalte von ${}^tA$; wie wir oben gesehen haben, läßt sie sich durch $(n-i)$ Spaltenvertauschungen zur letzen Spalte machen, wobei die Determinante mit $(-1)^{n-i}$ multipliziert wird, und durch nochmaliges Transponieren erhalten wir schließlich jene Matrix, in der die i-te Zeile zur n-ten geworden ist, ohne daß sich vor oder nach der Stelle i irgendetwas an der relativen Reihenfolge der Zeilen geändert hätte.

Die Determinante der so entstehenden Matrix ist, wie wir oben beim Spezialfall $i = j = n$ gesehen haben, gleich der Determinante jener $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_{ij}, die durch Streichen der letzten Zeile und Spalte entsteht; bezogen auf die ursprüngliche Matrix A entsteht sie durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Also ist, wenn wir noch die Vertauschungen berücksichtigen,

$$D_{ij} = (-1)^{n-i} \cdot (-1)^{n-j} \cdot \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij} ,$$

denn $(n-i) + (n-j) = 2n - (i+j)$ hat dieselbe Parität wie $(i+j)$. Fassen wir alles zusammen, erhalten wir die Formel

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

Die Entwicklung nach einer Zeile geht ganz entsprechend: Da die i-te Zeile von A gleich der i-ten Spalte von ${}^tA$ ist, führt obige Rechnung für die transponierte Matrix auf die Formel

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} .$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen, der trotz seines Namens bereits LEIBNIZ bekannt war:

Entwicklungssatz von Laplace: A sei eine $n \times n$-Matrix und A_{ij} sei jene $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A entsteht. Dann ist für jedes feste j

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

und für jedes feste i

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} ,$$

■

Die erste Formel aus diesem Satz bezeichnet man als die *Entwicklung der Determinante nach ihrer j-ten Spalte,* die zweite (die durch Anwendung der ersten auf die transponierte Matrix entsteht) entsprechend als die *Entwicklung nach der i-ten Zeile.*

PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1749–1827) war einer der bedeutendsten französischen Wissenschaftler seiner Zeit; berühmt sind vor allem seine Anwendungen der Analysis auf die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Himmelsmechanik und die Potentialtheorie. Bekannt wurde er auch durch die nach ihm und KANT benannte Theorie zur Entstehung des Universums. Als politischer Opportunist kam er gut durch die Wirren seiner Zeit, saß auch unter anderem in dem Kommitee, das Maßeinheiten nach dem Dezimalsystem einführte, war kurze Zeit Innenminister und wurde schließlich auch Graf und Marquis.

BARON GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646–1716) gilt als der letzte Universalgelehrte, der das gesamte Wissen seiner Zeit überblickte. In der Mathematik ist er vor allem berühmt durch die Entwicklung der Infinitesimalrechnung (bezüglich derer es einen langen Prioritätsstreit mit NEWTON gab); Bezeichnungen wie $\frac{dy}{dx}$ und $\int f(x)\,dx$ gehen auf ihn zurück. Durch seine Begründung der symbolischen Logik legte er auch einen wesentlichen Grundstein der späteren Informatik. Weitere Arbeiten befassen sich mit den Naturwissenschaften und der Technik, der Philosophie, Theologie und der Geschichte.

Als erste Anwendung wollen wir noch einmal die SARRUSsche Regel für Determinanten von 3×3-Matrizen beweisen: Entwicklung nach der ersten Spalte zeigt, daß

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) \\ &\quad + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})\end{aligned}$$

ist, was ausmultipliziert natürlich genau die alte Formel ergibt.

Rein theoretisch ist es gleichgültig, nach welcher Zeile oder Spalte man eine Determinante entwickelt, aber man wird natürlich versuchen, eine zu finden, in der möglichst viele Nullen stehen, so daß in obiger Summe möglichst wenige Summanden übrigbleiben. Falls es keine Zeile oder Spalte mit vielen Nullen gibt, kann man gelegentlich etwas nachhelfen,

indem man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen addiert (oder entprechend für eine Zeile):

$$\begin{aligned}&\det\big(\vec v_1, \dots, \vec v_i + \lambda \vec v_j, \dots, \vec v_n\big) \\ =&\det\big(\vec v_1, \dots, \vec v_i, \dots, \vec v_n\big) + \lambda \det\big(\vec v_1, \dots, \vec v_j, \dots, \vec v_n\big) \\ =&\det\big(\vec v_1, \dots, \vec v_i, \dots, \vec v_n\big)\,,\end{aligned}$$

da der zweite Summand das Argument $\vec v_j$ doppelt enthält und somit verschwindet.

Betrachten wir als Beispiel die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie hat zwar einen Eintrag Null, aber da in der dritten und vierten Spalte gleich in zwei Zeilen die Einträge entgegengesetzt gleich sind, ist es besser, zunächst die dritte Spalte durch die Summe von dritter und vierter Spalte zu ersetzen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Wenn wir jetzt nach der dritten Spalte entwickeln, kommen nur zwei der Summanden wirklich vor: Der erste ($i = 1$ und $j = 3$) und der dritte ($i = j = 3$). In beiden Fällen ist $i + j$ gerade, der Vorfaktor $(-1)^{i+j}$ ist also jeweils $+1$. Die 3×3-Determinanten, die durch Streichung der dritten Spalte und der ersten *bzw.* dritten Zeile entstehen, können nach der Regel von SARRUS berechnet werden:

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 0 + 16) - (12 + 0 + 12) = -6$$

und

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3 - 12 - 2) - (-9 - 4 - 2) = -2\,.$$

Also ist $\det A = (-1)(-6) + (-1)(-2) = 8$.