durch den Punkt $(1,0)$ mit Steigung 1. Hier ist B natürlich gleich der Menge aller Punkte auf der Geraden, also die gerade angegebene Menge selbst, und als Vektorraum nehmen wir den vom Richtungsvektor $\binom{1}{1}$ der Geraden aufgespannten Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$.

Dieselbe Gerade können wir auch durch die Gleichung

$$y = x + 1 \quad \text{oder} \quad -x + y = 1$$

beschreiben. Allgemein können wir, wie wir uns als nächstes überlegen wollen, jeden affinen Unterraum eines k^n als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems in n Unbekannten interpretieren, und umgekehrt ist auch jede solche Lösungsmenge, falls sie nicht leer ist, affiner Unterraum von k^n. (Mit k^n ist hier natürlich das Paar (k^n, k^n) gemeint, das wir kurz, wenn auch schlampig, als affinen Raum k^n bezeichnen.)

Beginnen wir mit der Lösungsmenge L eines linearen Gleichungssystems

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit} \quad A \in k^{m\times n}, \quad \vec{b} \in k^m$$

für einen Vektor $\vec{x} \in k^n$; mit anderen Worten mit der Lösungsmenge von m linearen Gleichungen in n Unbekannten. *Falls* es Lösungen gibt, ist die Differenz $\vec{y} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}$ zweier (nicht notwendigerweise verschiedener) Lösungen $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ eine Lösung des homogenen Gleichungssystems $A\vec{y} = \vec{0}$.

Die Lösungsmenge eines *homogenen* linearen Gleichungssystems in n Variablen ist aber Kern einer linearen Abbildung und daher (und auch aus vielen anderen Gründen) ein Untervektorraum U des k^n. Zusammen mit diesem Untervektorraum wird L zu einem affinen Raum, wobei die Abbildung $\varphi: L \times L \to U$ zwei Lösungen $\vec{x}^{(1)}$ und $\vec{x}^{(2)}$ deren Differenz $\vec{y} = \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(2)}$ als „Verbindungsvektor“ zuordnet, während die Abbildung $\psi_{\vec{x}}i: U \to L$ eine Lösung $\vec{y}$ des homogenen Gleichungssystems durch Addition von $\vec{x}$ zu einer Lösung des inhomogenen Gleichungssystems macht.

Ist umgekehrt (B,U) ein affiner Unterraum von (k^n, k^n), so können wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ von U wählen und diese zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ des k^n ergänzen. Bezüglich dieser neuen Basis des k^n ist dann U die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0\,.$$

Sind nun $(c_1, \dots, c_n)$ und $(d_1, \dots, d_n)$ zwei Punkte aus B, so liegt ihre Differenz (d.h. ihr „Verbindungsvektor“) in U, und somit ist $c_i = d_i$ für alle $i > r$. Damit ist B bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$x_{r+1} = d_{r+1}, \quad x_{r+2} = d_{r+2}, \quad \dots \quad x_n = d_n\,.$$

Durch Rücktransformation auf die Standardbasis des k^n kann man dieses in ein lineares Gleichungssystem bezüglich der ursprünglichen Basis umformen.

Spätestens die Interpretation als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems sollte jedem klargemacht haben, daß der Durchschnitt zweier affiner Unterräume entweder leer ist oder wieder ein affiner Unterraum; in beiden Fällen kann er durch Lösen eines linearen Gleichungssystems ermittelt werden. Seine Dimension hängt offensichtlich von einer ganzen Reihe von Faktoren ab: Schon in der Ebene kann der Durchschnitt zweier Geraden entweder leer sein (parallele Geraden) oder nulldimensional (ein Schnittpunkt) oder eindimensional (zusammenfallende Geraden). Die Erfahrung mit der Summe von Untervektorräumen in Abschnitt *g)* legt die Vermutung nahe, daß die Dimension des Durchschnitts mit der des von den beiden Unterräumen aufgespannten affinen Raums zusammenhängt.

Definition: Für zwei affine Unterräume (A,U) und (B,V) eines affinen Raums (C,W) ist der von A und B aufgespannte affine Unterraum von (C,W) der kleinste affine Unterraum (S,T) von (C,W), der beide enthält.

Auch hier stellt sich als erstes wieder die Frage, ob diese Definition sinnvoll ist, ob es einen solchen kleinsten Raum also überhaupt gibt. Das geht aber im wesentlichen genauso wie bei den Summen von Vektorräumen: Wir bilden den Durschnitt aller affiner Unterräume, die (A,U) und (B,V) als Unterräume enthalten. Der Durchschnitt einer beliebigen Menge affiner Unteräume ist entweder leer oder wieder ein affiner Unterraum. Leer kann er hier nicht sein, da wir nur Unterräume bertrachten, die die beiden gegebenen Räume enthalten, also ist er ein affiner Unterraum und offensichtlich der kleinste unter denen, die (A, U) und (B, V) als Unterräume enthalten.

Seine Dimension kann allerdings größer werden als die Summe der Dimensionen der beiden Ausgangsräume; ein wahrscheinlich aus der Schule bekanntes Beispiel dafür sind *windschiefe Geraden* im $\mathbb{R}^3$, d.h zwei Geraden, die zwar nicht parallel zueinander sind, die aber in zwei voneinander verschiedenen parallelen Ebenen liegen. In diesem Fall spannen die beiden Geraden offensichtlich den gesamten $\mathbb{R}^3$ auf, denn es gibt keine Ebene, in der beide liegen.

Damit drängt sich die Frage auf, ob es möglicherweise auch im $\mathbb{R}^4$ oder in Räumen noch höherer Dimension zwei Geraden geben kann, die den gesamten Raum aufspannen. Da die Anschauung hier leider nicht weiterhilft, müssen wir abstrakt mathematisch argumentieren. Das wird am einfachsten, wenn wir rechnen können, und dazu führen wir Koordinatensysteme ein:

Definition: Ein Koordinatensystem des affinen Raums (A, V) besteht aus einem Punkt $O \in A$, genannt der Ursprung oder auch Nullpunkt des Koordinatensystems, und einer Basis von V. Die Geraden durch O mit einem Basisvektor als Richtungsvektor heißen *Koordinatenachsen.*

Bezüglich eines solchen Koordinatensystems hat dann in der Tat jeder Punkt P eines n-dimensionalen affinen Raums A ein n-tupel von Koordinaten, nämlich die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{OP}$. Bevor wir aber zeigen können, daß der affine Raum dadurch isomorph wird zu k^n, müssen wir zunächst definieren, was strukturerhaltende Abbildungen zwischen affinen Räumen überhaupt sein sollen:

Definition: Eine affine Abbildung zwischen den affinen Räumen (A, V) und (B, W) besteht aus einer Abbildung $\varphi: A \to B$ und einer linearen Abbildung $\psi: V \to W$ derart, daß für alle Punkte $P, Q \in A$ gilt:

$$\overrightarrow{\varphi(P)\,\varphi(Q)} = \psi\left(\overrightarrow{PQ}\right) .$$

Die Abbildung heißt *Isomorphismus* oder *Affinität,* falls φ bijektiv ist.

Offensichtlich ist φ genau dann bijektiv, wenn ψ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist, so daß wir dies nicht zusätzlich fordern müssen. Es ist auch klar, daß nach Wahl eines Koordinatensystems eines n-dimensionalen affinen Raums die Koordinaten einen Isomorphismus mit dem affinen Raum k^n definieren.

Da wir wissen, wie lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen bezüglich zweier Basen aussehen, können wir auch sofort hinschreiben, wie die Abbildung $\varphi: A \to B$ bezüglich zweier Koordinatensysteme aussieht:

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + b_1, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j + b_m\Bigr) ,$$

im Gegensatz zu den homogenen linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen sind hier also auch inhomogene lineare Abbildungen möglich. In Matrixschreibweise betrachtet man am besten die Spaltenvektoren: Ist

$$\varphi\bigl((x_1, \dots, x_n)\bigr) = (y_1, \dots, y_m) ,$$

so ist

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Geometrisch betrachtet beschreibt der konstante Vektor $\vec{b}$ also eine Verschiebung.

Vor allem in der Computergraphik faßt man die Matrix A und den Vektor $\vec{b}$ oft auch zusammen zu einer Matrix A^* mit $m + 1$ Zeilen und $n + 1$ Spalten, indem man zunächst den Vektor $\vec{b}$ als $(n + 1)$-te Spalte an die Matrix anhängt und dann als $(m + 1)$-te Zeile lauter Nullen einsetzt mit Ausnahme einer Eins an der letzten Stelle:

$$A^* = \begin{pmatrix} A & \vec{b} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} ,$$

wobei die fette Null für n gewöhnliche Nullen steht. Mit dieser Bezeichnung ist dann

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ 1 \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix},$$

eine Formel, die zwar rechnerisch aufwendiger ist als die obige, dafür aber etwas kompakter. Sie hat auch den Vorteil, daß sich die Hintereinanderausführung affiner Abbildungen so durch ein Matrixprodukt beschreiben läßt.

Als Anwendung von Koordinatensystemem wollen wir, wie bereits erwähnt, die Dimension des Erzeugnisses zweier affiner Unterräume berechnen. Wir gehen also aus von den zwei affinen Unterräume (A, U) und (B, V) eines affinen Raums (C, W). Falls A und B nichtleeren Durchschnitt haben, können wir Koordinatensysteme mit einem gemeinsamen Nullpunkt finden und das W ist der Vektorraum $U + V$, d.h. in diesem Fall ist

$$\begin{aligned} \dim S = \dim T = \dim(U + V) &= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) \\ &= \dim A + \dim B - \dim(A \cap B), \end{aligned}$$

denn $A \cap B$ hat ein Koordinatensystem mit demselben Nullpunkt und daher ist der zugehörige Untervektorraum $U \cap V$.

Falls A und B aber disjunkt sind, müssen wir verschiedene Punkte O_A und O_B als Nullpunkte der entsprechenden Koordinatensysteme wählen; jetzt ist der Vektorraum T des von A und B aufgespannten affinen Raums (S, T) ganz sicher nicht mehr $U + V$, denn er muß nun auch den Verbindungsvektor von O_A und O_B enthalten. Wäre dieser als Summe $\vec{u} + \vec{v}$ von Vektoren $\vec{u} \in U$ und $\vec{v} \in V$ darstellbar, könnten wir den Vektor $\vec{u}$ an O_A abtragen und $-\vec{v}$ an O_B; beide Vektoren hätten denselben Endpunkt, der somit im (leeren) Durchschnitt von A und B liegen müßte. Also ist T mindestens gleich $U + V$ plus dem vom Verbindungsvektor aufgespannten eindimensionalen Untervektorraum. Das reicht aber auch schon, denn nimmt man etwa O_A als Ursprung des Koordinatensystems, kommt man nun durch Abtragen der Vektoren

aus diesem Untervektorraum zu jedem Punkt von A oder B. Also ist in diesem Fall

$$\dim S = \dim T = 1 + \dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V) + 1 .$$

Betrachten wir als Beispiel die beiden Unterräume

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

von $\mathbb{R}^5$. Der Untervektorraum zu A ist

$$\begin{aligned} U &= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

der zu B ist

$$V = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \right].$$

Der Durchschnitt der beiden Untervektorräume ist also eindimensional und wird vom gemeinsamen Basisvektor aufgespannt.

Zur Berechnung des Durchschnitts von A und B müssen wir untersuchen, ob es reelle Zahlen $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2$ gibt, so daß

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\\16\end{pmatrix}$$

ist. Mit den gerade berechneten neuen Basen von U und V können wir stattdessen auch das etwas einfachere Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix}0\\0\\2\\6\\12\end{pmatrix}$$

betrachten mit neuen Variablen $\lambda_3, \mu_3, \lambda_4$ und μ_4, denn der Durchschnitt zweier affiner Unterräume ist natürlich in jedem Koordinatensystem derselbe. Das neue Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn auch das Gleichungssystem

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\0\\2\\6\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

eine Lösung hat. Bei diesem System kann das für die erste Komponente nur dann gutgehen, wenn $\lambda = -1$ ist; setzen wir diesen Wert ein und betrachten dann die zweite Komponente, folgt, daß $\mu = 2$ sein muß. Für ν bleibt noch das Gleichungssystem

$$\nu \begin{pmatrix}0\\0\\2\\6\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\-4\\-4\\-8\end{pmatrix},$$

das offensichtlich unlösbar ist. Damit war auch das ursprüngliche Gleichungssystem unlösbar, wir sind hier also im Fall $A \cap B = \emptyset$.

Nach obiger Formel hat das Erzeugnis von A und B daher die Dimension

$$\dim A + \dim B - \dim(U \cap V) + 1 = 2 + 2 - 1 + 1 = 4\,;$$

wie wir oben gesehen haben, enthält der zugehörige Untervektorraum außer $U + V$ auch noch den Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

der beiden Nullpunkte von A und B.

Da wir $U + V$ und auch den Verbindungsvektor kennen, läßt sich das Erzeugnis von A und B nun leicht explizit angeben: Es ist der affine Unterraum

$$C = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\1\\4\\9\\16\end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix}\lambda, \mu, \nu,\\ \rho \in \mathbb{R}\end{matrix} \right\}.$$

§6: Determinanten, Eigenwerte und Eigenvektoren

In diesem Paragraphen soll genauer erklärt werden, wie man für eine gegebene lineare Abbildung eine Basis findet, bezüglich derer ihre Abbildungsmatrix eine besonders einfache Form hat. Eine solche Basen besteht im Idealfall aus den sogenannten *Eigenvektoren* der linearen Abbildung; falls wir eine solche Basis finden können, ist die darauf bezogene Abbildungsmatrix einfach eine Diagonalmatrix. In weniger idealen Fällen werden wir immerhin noch eine Basis finden können, bezüglich derer die Abbildungsmatrix Dreiecksgestalt hat.

Als zwar nicht unbedingt notwendiges, aber nützliches Hilfsmittel zur Berechnung von Eigenvektoren betrachten wir zunächst *Determinanten,* die uns insbesondere ein kompaktes Kriterium dafür geben, wann n Vektoren aus k^n linear unabhängig sind; außerdem sind sie nützlich für Volumenberechnungen, für die Lösung linearer und nichtlinearer Gleichungssysteme und viele weitere Anwendungen.

a) Determinanten in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Beginnen wir mit den Vektorräumen $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, wo wir bereits Kriterien für die lineare Abhängigkeit kennen:

Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie dieselbe Richtung haben oder (mindestens) einer der beiden der Nullvektor ist, d.h. genau dann, wenn ihr Vektorprodukt verschwindet. Wenden wir dies insbesondere auf zwei Vektoren mit dritter Komponente Null an, so sind diese linear abhängig genau dann, wenn

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

ist, also genau dann, wenn $u_1v_2 - u_2v_1$ verschwindet.

Da wir Vektoren im $\mathbb{R}^2$ mit Vektoren aus einer festen Ebenen des $\mathbb{R}^3$ identifizieren können, gilt also:

$\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ und $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ aus $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear abhängig, wenn $u_1v_2 - u_2v_1 = 0$ ist.

Diesen Ausdruck bezeichnen wir als *Determinante*

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\text{def}}{=} u_1v_2 - u_2v_1$$

der beiden Vektoren.

Sowohl aus der expliziten Form wie auch aus den Eigenschaften des Vektorprodukts liest man sofort die folgenden Eigenschaften ab:

(D1) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$

(D2) $\det(\vec{u}, \vec{v})$ ist linear in jedem ihrer beiden Argumente, d.h.

$$\det(\lambda\vec{u}_1 + \mu\vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda \det(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu \det(\vec{u}_2, \vec{v})$$

und

$$\det(\lambda(\vec{u}, \lambda\vec{v}_1 + \mu\vec{v}_2) = \lambda \det(\vec{u}, \vec{v}_1) + \mu \det(\vec{u}, \vec{v}_2) .$$

Außerdem gilt natürlich

(D3) $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ genau dann, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ linear abhängig sind.

Für den $\mathbb{R}^3$ haben wir in §1 gesehen, daß drei Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ genau dann linear abhängig sind, wenn ihr *Spatprodukt* $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ verschwindet, denn wir konnten dieses Produkt geometrisch interpretieren in dem Sinne, daß sein Betrag gleich dem Volumen des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Parallelepipeds ist. In Koordinaten ausgedrückt ist $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot w$

$$= \left(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

$$= u_2v_3w_1 - u_3v_2w_1 + u_3v_1w_2 - u_1v_3w_2 + u_1v_2w_3 - u_2v_1w_3 .$$

Da das Volumen eines Parallelepipeds unabhängig von der Reihenfolge der aufspannenden Vektoren ist, muß offensichtlich gelten

$$\begin{aligned} &\left|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}\right| = \left|(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u}\right| = \left|(\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v}\right| \\ = &\left|(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot \vec{w}\right| = \left|(\vec{w} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}\right| = \left|(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}\right| . \end{aligned}$$

Definieren wir also

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \underset{\text{def}}{=} (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} ,$$

so hängt der Betrag nicht von der Reihenfolge der Vektoren ab.

Das Vorzeichen hängt aber natürlich von der Reihenfolge ab, denn wegen der Schiefsymmetrie des Vektorprodukts ist beispielsweise

$$\det(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = -\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) ;$$

entsprechend ändert sich das Vorzeichen, wie man sich leicht überzeugt, bei jeder Vertauschung der Reihenfolge zweier Vektoren. Da sowohl das Vektorprodukt als auch das Skalarprodukt linear in ihren Argumenten sind, ist auch det linear in jedem ihrer drei Argumente, wir haben also wieder wie im $\mathbb{R}^2$ die drei Eigenschaften

(D1) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ändert ihr Vorzeichen, nicht aber ihren Betrag, wenn irgendwelche zwei der Argumente miteinander vertauscht werden.

(D2) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ ist linear in jedem ihrer drei Argumente.

(D3) $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ genau dann, wenn $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.