Nach diesem Satz läßt sich die Dimension eines Vektorraums einfach dadurch bestimmen, daß man eine Basis findet und deren Elemente zählt. Beispielsweise hat $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum die Dimension zwei, da $\{1, i\}$ offensichtlich eine Basis ist.

## f) Lineare Abbildungen und Untervektorräume

Lineare Abbildungen zwischen beliebigen Vektorräumen werden genauso definiert wie die zwischen den speziellen Vektorräumen $k^n$:

**Definition:** *a)* Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt *linear,* wenn für alle Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ und alle $\lambda, \mu \in k$ gilt:

$$\varphi(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}) + \mu\varphi(\vec{v}) .$$

*b)* Unter dem *Kern* von $\varphi$ verstehen wir die Menge

$$\operatorname{Kern}\varphi \underset{\text{def}}{=} \left\{ \vec{v} \in V \;\middle|\; \varphi(\vec{v}) = \vec{0} \right\} .$$

*c)* Das *Bild* von $\varphi$ ist die Menge

$$\operatorname{Bild}\varphi \underset{\text{def}}{=} \left\{ \vec{w} \in W \;\middle|\; \text{Es gibt } \vec{v} \in V \text{ mit } \varphi(\vec{v}) = \vec{w} \right\} .$$

Aus §2 kennen wir zahlreiche Beispiele linearer Abbildungen $k^n \to k^m$; die folgenden Beispiele sollen zeigen, daß sich lineare Abbildungen auch in anderen Teilgebieten des Mathematik oft auf natürliche Weise ergeben.

So ist für jeden Punkt $t_0 \in (a, b)$ die Auswertungsabbildung

$$\mathcal{C}^0\big((a, b), \mathbb{R}\big) \to \mathbb{R}; \quad f \mapsto f(t_0)$$

nach Definition der Vektorraumoperationen von $\mathcal{C}^0\big((a, b), \mathbb{R}\big)$ linear; genauso auch die Abbildung

$$\mathcal{C}^1\big((a, b), \mathbb{R}\big) \to \mathcal{C}^0\big((a, b), \mathbb{R}\big); \quad f \mapsto f' ,$$

denn $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$. Auch die Abbildung

$$\mathcal{C}^2\big((a, b), \mathbb{R}\big) \to \mathcal{C}^0\big((a, b), \mathbb{R}\big); \quad f \mapsto f'' - \omega^2 f$$

ist für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ linear; ihr Kern besteht aus allen Funktionen, die der Schwingungsdifferentialgleichung

$$f''(x) = \omega^2 f(x)$$

genügen.



Kern und Bild einer linearen Abbildung werden im allgemeinen unendliche Mengen sein, so daß zunächst nicht ganz klar ist, wie man sie mit endlichem Aufwand beschreiben kann. Bei nichtlinearen Abbildungen kann so etwas in der Tat ein großes Problem sein, aber hier im Linearen reichen unsere vorhandenen Werkzeuge völlig aus:

Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Elemente des Kerns von $\varphi: V \to W$, so ist

$$\varphi(\vec{v} + \vec{w}) = \varphi(\vec{v}) + \varphi(\vec{w}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} ,$$

und für $\lambda \in k$ ist auch

$$\varphi(\lambda\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{0} = \vec{0} ;$$

außerdem liegt natürlich der Nullvektor in Kern $\varphi$, denn

$$\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{0}) = 0\varphi(\vec{0}) = \vec{0} .$$

Mit der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation von $V$ ist daher auch der Kern von $\varphi$ ein $k$-Vektorraum, ein sogenannter *Untervektorraum* von $V$:

**Definition:** Eine Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums $V$ heißt *Untervektorraum,* in Zeichen $U \le V$, wenn $U$ bezüglich der Einschränkungen der Addition und der Skalarmultiplikation von $V$ ein Vektorraum ist. Ist zusätzlich $U \ne V$, sprechen wir von einem *echten* Untervektorraum und schreiben $U < V$.

Beim Nachweis der Vektorraumaxiome für $U$ kann man natürlich Eigenschaften wie das Assoziativgesetz oder die Distributivgesetze weglassen, denn da diese für alle Vektoren aus $V$ gelten, gelten sie erst recht auch für alle aus $U$. Wirklich gezeigt werden muß nur, daß weder die Addition noch die Skalarmultiplikation aus $U$ herausführen, und daß der Nullvektor in $U$ liegt. Dies kann man auch formulieren als

**Untervektorraumkriterium:** Eine nichtleere Teilmenge $U \subseteq V$ eines Vektorraums $V$ ist genau dann ein Untervektorraum, wenn mit zwei Vektoren $\vec{u},\ \vec{v} \in U$ und zwei Skalaren $\lambda, \mu \in k$ auch $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ in $U$ liegt.

Zum *Beweis* ist praktisch alles schon gesagt; wir müssen uns nur noch überlegen, daß der Nullvektor in $U$ liegt. Da $U$ nach Voraussetzung nicht

leer ist, gibt es zumindest irgendeinen Vektor $\vec{u} \in U$, und mit diesem liegt auch $1\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{0}$ in $U$.
■

Als Anwendung wollen wir uns überlegen, daß das Bild einer linearen Abbildung $\varphi: V \to W$ ein Untervektorraum von $W$ ist: Für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \operatorname{Bild}\varphi$ gibt es Vektoren $\vec{r}, \vec{s} \in V$, so daß $\varphi(\vec{r}) = \vec{v}$ und $\varphi(\vec{s}) = \vec{w}$ ist. Wegen der Linearität von $\varphi$ liegt dann für je zwei Skalare $\lambda, \mu \in k$ auch

$$\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} = \lambda\varphi(\vec{r}) + \mu\varphi(\vec{s}) = \varphi(\lambda\vec{r} + \mu\vec{s})$$

im Bild von $\varphi$, das somit ein Untervektorraum von $W$ ist.

Kern und Bild einer linearen Abbildung haben natürlich etwas mit deren Injektivität und Surjektivität zu tun; es gilt:

**Lemma:** $\varphi: V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kern}\varphi$ der Nullvektorraum ist, und genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Bild}\varphi = W$ ist.

*Beweis:* Die zweite Aussage ist zu trivial, als daß man etwas dazu sagen müßte, betrachten wir also die erste. Falls $\varphi$ injektiv ist, hat insbesondere der Nullvektor nur ein einziges Urbild, d.h. der Kern besteht nur aus dem Nullvektor, der natürlich immer im Kern liegt. Ist umgekehrt $\operatorname{Kern}\varphi$ der Nullraum und haben zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in V$ dasselbe Bild, so ist

$$\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = \vec{0}\,,$$

d.h. $\vec{u} - \vec{v}$ liegt im Kern und muß daher gleich dem Nullvektor sein, so daß $\vec{u} = \vec{v}$ ist. Dies zeigt die Injektivität von $\varphi$.
■

Als nächstes wollen wir uns mit Dimensionen von Untervektorräumen, insbesondere auch Kernen und Bildern beschäftigen. Anschaulich klar und auch recht einfach zu beweisen ist der folgende

**Satz:** Für einen echten Untervektorraum $U < V$ eines endlichdimensionalen Vektorraums $V$ ist $\dim U < \dim V$.

*Beweis:* Da linear unabhängige Vektoren aus $U$ natürlich auch in $V$ linear unabhängig sind, ist auf jeden Fall $\dim U \le \dim V$.



Falls beide Vektorräume die gleiche Dimension $n$ haben, gibt es $n$ linear unabhängige Vektoren in $U$. Wie oben beim Beweis des Basisergänzungssatzes folgt dann, daß jeder Vektor aus $V$ als Linearkombination dieser Vektoren darstellbar ist, d.h. $U = V$.
■

Interessanter ist

**Satz:** Für einen endlichdimensionalen Vektorraum $V$ und eine lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ ist

$$\dim \operatorname{Bild}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Kern}\varphi\,.$$

*Beweis:* $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ sei eine Basis von $\operatorname{Kern}\varphi$; falls $\varphi$ injektiv ist, setzen wir $r = 0$. Nach dem Basisergänzungssatz oder (falls $r = 0$) wegen der Existenz von Basen lassen sich dann $n - r$ Vektoren $\vec{b}_{r+1}, \dots, \vec{b}_n$ finden mit $n = \dim V$, so daß $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ eine Basis von $V$ ist.

Das Bild eines beliebigen Vektors $\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n$ ist dann

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda_1\varphi(\vec{b}_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{b}_n) = \lambda_{r+1}\varphi(\vec{b}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{b}_n)\,,$$

da $\vec{b}_1 \dots, \vec{b}_r$ ja auf den Nullvektor abgebildet werden. Also wird $\operatorname{Bild}\varphi$ von den Vektoren $\varphi(\vec{b}_{r+1}), \dots, \varphi(\vec{b}_n)$ erzeugt.

Diese Vektoren sind auch linear unabhängig in $W$, denn ist

$$\lambda_{r+1}\varphi(\vec{b}_{r+1}) + \cdots + \lambda_n\varphi(\vec{b}_n) = \varphi(\lambda_{r+1}\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n) = \vec{0}\,,$$

so liegt $\lambda_{r+1}\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n$ im Kern von $\varphi$.

Im Fall einer injektiven Abbildung ist $\lambda_{r+1}\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n$ daher gleich dem Nullvektor, und damit müssen alle $\lambda_i = 0$ sein, denn die $\vec{b}_i$ sind als Basisvektoren insbesondere linear unabhängig.

Falls $\varphi$ nicht injektiv ist, können wir nur sagen, daß der Vektor $\lambda_{r+1}\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n$ im Kern von $\varphi$ liegt; er ist also darstellbar als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ des Kerns:

$$\lambda_{r+1}\vec{b}_{r+1} + \cdots + \lambda_n\vec{b}_n = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{b}_r\,.$$

Auch daraus folgt wegen der linearen Unabhängigkeit der $\vec{b}_i$, daß alle $\lambda_i$ Null sein müssen.

Damit ist $\{\vec{b}_{r+1}, \ldots, \vec{b}_n\}$ eine Basis von Bild $\varphi$, d.h.

$$\dim \operatorname{Bild} \varphi = n - r = \dim V - \dim \operatorname{Kern} \varphi ,$$

wie behauptet.

■

Wir werden diese Aussage gelegentlich als den *Homomorphiesatz* bezeichnen. Der „echte" Homomorphiesatz ist zwar eine schärfere Aussage über den Bildraum, die auch für unendlichdimensionale Vektorräume gilt, die wir mit dem uns bislang zur Verfügung stehenden Begriffsapparat aber noch nicht formulieren können. Der obige Satz ist eine unmittelbare Folgerung aus dem „echten" Homomorphiesatz; eine seiner Anwendungen werden wir im nächsten Abschnitt kennenlernen.

## g) Summen von Vektorräumen

Im $\mathbb{R}^3$ spannen zwei verschiedene Geraden durch einen Punkt eine Ebene durch diesen Punkt auf; in diesem Abschnitt geht es um die Verallgemeinerung dieses Phänomens für beliebige Vektorräume.

**Definition:** $U, V$ seien Untervektorräume des $k$-Vektorraums $W$. Die *Summe* von $U$ und $V$, in Zeichen $U+V$, ist der kleinste Untervektorraum von $W$, der sowohl $U$ als auch $V$ enthält.

Wir müssen uns als erster überlegen, daß diese Definition überhaupt sinnvoll ist, daß es einen solchen kleinsten Untervektorraum also auch wirklich gibt. Dazu betrachten wir die Menge $\mathcal{M}$ *aller* Untervektorräume $T \le W$, die sowohl $U$ als auch $V$ enthalten, und bilden den Durchschnitt aller Untervektorräume aus $\mathcal{M}$. Aus dem Untervektorraumkriterium folgt sofort, daß der Durchschnitt beliebig vieler Untervektorräume wieder ein Untervektorraum ist, denn er enthält den Nullvektor und für zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ aus dem Durchschnitt liegt $\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$ für alle $\lambda, \mu \in k$ in jedem einzelnen der Untervektorräume, also auch in deren Durchschnitt. Damit ist der Durchschnitt aller Untervektorräume $T \in \mathcal{M}$ in der Tat ein Untervektorraum von $W$, der sowohl $U$ als auch $V$ enthält, und er ist offensichtlich der kleinste, da er als Durchschnitt aller $T \in \mathcal{M}$ in jedem einzelnen $T \in \mathcal{M}$ enthalten ist.



Etwas konkreter erhalten wir $U + V$, wenn wir beachten, daß dieser Vektorraum natürlich auch alle Linearkombinationen seiner Elemente enthalten muß, insbesondere also alle Linearkombinationen von Vektoren aus $U \cup V$. Da die Menge dieser Linearkombinationen einen Vektorraum bildet, kann

$$U + V = [U \cup V]$$

auch als das Erzeugnis von $U \cup V$ betrachtet werden.

Damit kommen wir langsam in die Nähe einer auch praktisch brauchbaren Darstellung von $U + V$: Wir wählen Erzeugendensysteme (besser noch Basen) $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von $U$ und $V$; dann ist

$$U + V = [\mathcal{B} \cup \mathcal{C}] .$$

Selbst wenn $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Basen sind, muß allerdings $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ keine Basis mehr sein, denn beispielsweise könnte ein Vektor aus $\mathcal{C}$ linear abhängig von den Vektoren aus $\mathcal{B}$ sein: Ist beispielsweise im $\mathbb{R}^3$

$$U = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right] \quad \text{und} \quad V = \left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right] ,$$

so ist

$$U + V = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right]$$
$$= \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right] = \mathbb{R}^3 .$$

Die Dimension von $U + V$ läßt sich im endlichdimensionalen Fall ähnlich wie im vorigen Abschnitt leicht aus dem Basisergänzungssatz herleiten: Wir starten mit einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$ des Durchschnitts $U \cap V$ und erweitern diese zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s\}$ von $U$ sowie zu einer Basis $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{c}_{r+1}, \ldots, \vec{c}_t\}$ von $V$. Dann ist die Vereinigung $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_s, \vec{c}_{r+1}, \ldots, \vec{c}_t\}$ dieser beiden Basen ein Erzeugendensystem von $U + V$. Dieses ist linear unabhängig, denn in einer nichttrivialen Darstellung

$$\vec{0} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_s \vec{b}_s + \mu_{r+1} \vec{c}_{r+1} + \cdots + \mu_t \vec{c}_t$$

müßte zunächst mindestens eines $\mu_j$ von Null verschieden sein, da sonst die Basis von $U$ linear abhängig wäre. Also gäbe es eine vom Nullvektor verschiedene Linearkombination der $\vec{c}_j$, die gleichzeitig als Linearkombination der $\vec{b}_i$ darstellbar wäre. Dies wäre aber ein Vektor aus $V$, der gleichzeitig in $U$ liegt, also ein Element von $U \cap V$ und als solches eindeutig darstellbar als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1, \ldots \vec{b}_r$ von $U \cap V$. Für eine nichttriviale Linearkombination der $\vec{c}_j$ widerspricht dies der eindeutigen Basisdarstellung im Vektorraum $V$. Also ist die angegebene Menge eine Basis; da sie $s + t - r$ Elemente enthält und $r$ die Dimension des Durchschnitts ist, haben wir gezeigt

**Satz:** Für zwei endlichdimensionale Untervektorräume $U, V$ eines Vektorraums $W$ ist

$$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)\,.$$

■

Um etwas Übung im Umgang mit Vektorräumen und linearen Abbildungen zu bekommen, wollen wir denselben Satz gleich noch einmal beweisen. Dazu definieren wir zunächst eine weitere Summe, die *direkte Summe* zweier beliebiger Vektorräume $U, V$ über demselben Körper $k$.

**Definition:** Die direkte Summe $U \oplus V$ zweier $k$-Vektorräume $U, V$ ist das kartesische Produkt $U \times V$ mit der Addition

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{r}, \vec{s}) \underset{\text{def}}{=} (\vec{u} + \vec{r}, \vec{v} + \vec{s})$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda(\vec{u}, \vec{v}) \underset{\text{def}}{=} (\lambda\vec{u}, \lambda\vec{v})$$

für alle $\vec{u}, \vec{r} \in V$ und $\vec{v}, \vec{s} \in W$ sowie alle $\lambda \in k$.

Da alles komponentenweise definiert ist, lassen sich alle Vektorraumaxiome problemlos abhaken; $U \oplus V$ ist also in der Tat ein Vektorraum.



Ist $\mathcal{B}$ eine Basis von $U$ und $\mathcal{C}$ eine Basis von $V$, so bilden offensichtlich die Vektoren $(\vec{b}, \vec{0})$ mit $\vec{b} \in \mathcal{B}$ zusammen mit den Vektoren $(\vec{0}, \vec{c})$ zu den Elementen $\vec{c} \in \mathcal{C}$ eine Basis von $U \oplus V$; insbesondere ist also für endlichdimensionale Vektorräume $U, V$

$$\dim U \oplus V = \dim U + \dim V\,.$$

Sind nun $U, V$ Untervektorräume eines Vektorraums $W$, so können wir einerseits die Summe $U + V$ in $W$ bilden, andererseit aber auch völlig unabhängig vom gemeinsamen umgebenden Raum $W$ die direkte Summe $U \oplus V$. Offensichtlich gibt es eine lineare Abbildung

$$U \oplus V \to U + V; \quad (\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}\,.$$

Ein Vektor $(\vec{u}, \vec{v}) \in U \oplus V$ liegt genau dann im Kern dieser Abbildung, wenn $\vec{u} = -\vec{v}$ ist; der Kern besteht also gerade aus den sämtlichen Vektoren $(\vec{u}, -\vec{u})$ mit $\vec{u} \in U \cap V$ und hat damit insbesondere dieselbe Dimension wie $U \cap V$. Sie ist außerdem trivialerweise surjektiv, also folgt aus dem Dimensionssatz des letzten Abschnitts im endlichdimensionalen Fall noch einmal der obige Satz

$$\begin{aligned}\dim(U + V) &= \dim(U \oplus V) - \dim(U \cap V)\\ &= \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)\,.\end{aligned}$$

Dieser zweite Beweis ist beileibe nicht die einzige Anwendung direkter Summen; ein weiteres Beispiel liefern etwa elektrische Netzwerke: Der Strom, der ein einzelnes Element durchfließt, wird beschrieben durch ein Element eines eindimensionalen Vektorraums über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, je nachdem ob man Gleichströme oder Wechselströme (einer konstanten Frequenz) betrachtet. Setzt man die einzelnen Elemente zu einem Netzwerk zusammen, wird dessen Zustand beschrieben durch ein Element der direkten Summe der Vektorräume zu den einzelnen Elementen, wobei allerdings die KIRCHHOFFschen Gesetze dafür sorgen, daß tatsächlich nur Zustände aus einem Untervektorraum dieser direkten Summe möglich sind. (Die sogenannte *topologische Netzwerktheorie* stellt Methoden bereit, wie man eine Basis dieses Untervektorraums konstruieren kann.) Entsprechend ist, wenn zwei oder mehrere elektrische Netzwerke miteinander in Verbindung gebracht werden, der Zustandsraum ein Untervektorraum der direkten Summe der Zustandsräume der einzelnen Netzwerke.

## h) Isomorphie von Vektorräumen

Da lineare Abbildungen die Vektorraumstrukturen ihres Urbild- und Zielraums respektieren, liegt es nahe, Vektorräume, zwischen denen es eine *bijektive* lineare Abbildung gibt, als nicht wesentlich verschieden zu betrachten: Schließlich überträgt sich jede Rechnung, die wir in einem der beiden Vektorräume machen, sofort über die Abbildung oder ihre Umkehrabbildung auf den anderen. Der mathematische Begriff für „nicht wesentlich verschieden" ist *isomorph,* was ins Deutsche etwa mit „von gleicher Gestalt" übersetzt werden kann:

**Definition:** *a)* Ein *Isomorphismus* $\varphi: V \to W$ zwischen zwei $k$-Vektorräumen $V$ und $W$ ist eine bijektive lineare Abbildung.
*b)* Zwei Vektorräume $V, W$ heißen *isomorph,* in Zeichen $V \cong W$, wenn es einen Isomorphismus $\varphi: V \to W$ gibt.

Aus der Existenz von Basen für endlichdimensionale Vektorräume folgt sofort

**Satz:** Jeder $n$-dimensionale Vektorraum $V$ über dem Körper $k$ ist isomorph zu $k^n$.

*Beweis:* Als $n$-dimensionaler Vektorraum hat $V$ eine $n$-elementige Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, bezüglich derer sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ in eindeutiger Weise schreiben läßt als

$$\vec{v} = \lambda_1(\vec{v})\,\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n(\vec{v})\,\vec{b}_n$$

mit von $\vec{v}$ abhängigen Koeffizienten $\lambda_i(\vec{v}) \in k$. Offensichtlich ist die Abbildung

$$\varphi: V \to k^n; \quad \vec{v} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda_1(\vec{v}) \\ \vdots \\ \lambda_n(\vec{v}) \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus. ■

Beispielsweise ist

$$\underbrace{k \oplus \cdots \oplus k}_{n \text{ mal}}$$



ein $n$-dimensionaler Vektorraum und somit isomorph zu $k^n$; außerdem ist für zwei Untervektorräume $U, V$ eines Vektorraums $W$, deren Durchschnitt $U \cap V$ der Nullvektorraum ist, $U \oplus V \cong U + V$, denn dann ist die gegen Ende von Abschnitt *g)* angegebene lineare Abbildung $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} + \vec{v}$ ein Isomorphismus. Da man zwischen isomorphen Vektorräumen nicht garzu sehr unterscheidet, schreibt man in solchen Fällen die Summe auch gelegentlich als $U \oplus V$ und sagt, die Summe sei direkt.

## i) Abbildungsmatrizen und Basiswechsel

Im Fall der Vektorräume $k^n$ können wir lineare Abbildungen durch Matrizen rechnerisch gut in den Griff bekommen. Nachdem wir gerade gesehen haben, daß jeder endlichdimensionale Vektorraum isomorph ist zu einem Vektorraum der Form $k^n$, sollte es auch für beliebige lineare Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen Abbildungsmatrizen geben.

Es gibt allerdings einen wesentlichen Unterschied: Zu einer linearen Abbildung $\varphi: k^n \to k^m$ gehört auf ganz natürliche Weise genau eine Abbildungsmatrix; einer lineare Abbildung $\varphi: V \to W$ zwischen zwei beliebigen endlichdimensionalen Vektorräumen dagegen können wir erst dann eine Abbildungsmatrix zuordnen, wenn wir vorher Isomorphismen $V \to k^n$ und $W \to k^m$ fixiert haben, oder, was nach dem vorigen Abschnitt auf dasselbe hinausläuft, wenn wir sowohl in $V$ als auch in $W$ eine Basis festgelegt haben.

Dies kompliziert die Lage zwar etwas, hat aber andererseits den Vorteil, daß man durch geschickte Basiswahl auf rechnerisch einfache Matrizen kommen kann; entsprechende Strategien werden wir im nächsten Paragraphen kennenlernen.

Hier wollen wir uns zunächst genau überlegen, wie Abbildungsmatrizen erklärt werden können und wie sie sich unter Basiswechsel verhalten. Dabei beschränken wir uns zunächst auf den besonders wichtigen Fall einer linearen Selbstabbildung $\varphi: V \to V$ eines Vektorraums; die Verallgemeinerung auf den allgemeinen Fall wird nachher eine reine Formalität sein.

Beginnen wir mit einem Beispiel: Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kann als Vektorraum über $\mathbb{R}$ aufgefaßt werden; praktisch nach Definition von $\mathbb{C}$ ist $\{1, i\}$ eine Basis, so daß $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.

Für jede komplexe Zahl $c = a + ib$ ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto cz$$

linear; was ist ihre Abbildungsmatrix bezüglich der Basis $\mathcal{B} = \{1, i\}$ ?

Für eine Antwort auf diese Frage müssen wir ausrechnen, wie $\varphi$ auf die Basisdarstellung von Vektoren wirkt: Mit $z = x + iy$ ist

$$\varphi(z) = cz = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)\,;$$

der Vektor $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, der der komplexen Zahl $z = x + iy$ entspricht, wird also abgebildet auf

$$\begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

und die Abbildungsmatrix von $\varphi$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ ist $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Formal gesehen haben wir also auf einen Vektor $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$ zunächst die Umkehrabbildung des Isomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ angewandt, um ihn zur komplexen Zahl $z = x + iy$ zu machen; als nächstes wurde diese auf die komplexe Zahl $\varphi(z) = cz$ abgebildet, und darauf schließlich wurde der Isomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ angewandt.

Entsprechend können wir auch für eine beliebige lineare Abbildung $\varphi: V \to V$ vorgehen: Wir wählen eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ und damit, wie oben ausgeführt, einen Isomorphismus $\psi_{\mathcal{B}}: V \to k^n$. Über die Abbildungskette

$$k^n \xrightarrow{\psi_{\mathcal{B}}^{-1}} V \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi_{\mathcal{B}}} k^n$$

definieren wir dann eine lineare Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{B}} \underset{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{B}} \circ \varphi \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}: k^n \to k^n$$



und bezeichnen ihre Abbildungsmatrix $A_{\mathcal{B}} \in k^{n\times n}$ als die *Abbildungsmatrix von $\varphi$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$*.

Für eine andere Basis $\mathcal{C}$ von $V$ haben wir entsprechend eine Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{C}} = \psi_{\mathcal{C}} \circ \varphi \circ \psi_{\mathcal{C}}^{-1}: k^n \to k^n\,,$$

und da $\psi_{\mathcal{B}}, \psi_{\mathcal{C}}$ Isomorphismen sind, folgt

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{C}} &= \psi_{\mathcal{C}} \circ \varphi \circ \psi_{\mathcal{C}}^{-1} = \psi_{\mathcal{C}} \circ (\psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{B}}) \circ \varphi \circ (\psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{B}}) \circ \psi_{\mathcal{C}}^{-1} \\ &= (\psi_{\mathcal{C}} \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}) \circ \varphi_{\mathcal{B}} \circ (\psi_{\mathcal{C}} \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1})^{-1}\,.\end{aligned}$$

Die eingeklammerte lineare Abbildung

$$\psi_{\mathcal{C}} \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}: k^n \to k^n$$

bildet einen Vektor $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in k^n$ zunächst via $\psi_{\mathcal{B}}^{-1}$ ab auf den Vektor

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{b}_n \in V\,,$$

wobei $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ ist. Dieser Vektor wird dann via $\psi_{\mathcal{C}}$ wieder nach $k^n$ abgebildet, d.h. ist $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_n\}$ und

$$\vec{v} = \mu_1 \vec{c}_1 + \cdots + \mu_n \vec{c}_n\,,$$

so ist

$$(\psi_{\mathcal{C}} \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}) \left( \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Schematisch betrachtet ist $\psi_{\mathcal{C}} \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}$ durch die Abbildungsfolge

$$k^n \xrightarrow{\psi_{\mathcal{B}}^{-1}} V \xrightarrow{\psi_{\mathcal{C}}} k^n$$

gegeben; die Koeffizienten einer Basisdarstellung bezüglich $\mathcal{B}$ werden auf die bezüglich $\mathcal{C}$ abgebildet.

Wie jede lineare Abbildung $k^n \to k^n$ hat auch $\psi_{\mathcal{C}} \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}$ eine Abbildungsmatrix $M$, und wie üblich stehen in den Spalten dieser Matrix die Bilder der Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ von $k^n$; diese werden durch $\psi_{\mathcal{B}}^{-1}$ auf die $\vec{b}_i$ abgebildet. Ist also

$$\vec{b}_i = \mu_{1i}\vec{c}_1 + \cdots + \mu_{1n}\vec{c}_n ,$$

die Basisdarstellung von $\vec{b}_i \in \mathcal{B}$ bezüglich $\mathcal{C}$, so ist

$$M = \begin{pmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix}$$

und damit ist ist

$$A_{\mathcal{C}} = MA_{\mathcal{B}}M^{-1} \quad \text{oder} \quad A_{\mathcal{B}} = M^{-1}A_{\mathcal{C}}M .$$

Meist sind nicht die „alten“ Basisvektoren $\vec{b}_i$ als Linearkombinationen der „neuen“ Vektoren $\vec{c}_i$ bekannt, sondern umgekehrt die $\vec{c}_i$ definiert als gewisse Linearkombinationen

$$\vec{c}_i = \lambda_{1i}\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_{1n}\vec{b}_n .$$

Vertauscht man in obiger Formel die Rolle von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ folgt sofort, daß für die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \cdots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

gilt

$$A_{\mathcal{C}} = L^{-1}A_{\mathcal{B}}L \quad \text{und} \quad A_{\mathcal{B}} = LA_{\mathcal{B}}L^{-1} ;$$

insbesondere ist also $L = M^{-1}$.

Betrachten wir als einfaches Beispiel hierzu die Basis $\mathcal{C} = \{1+i, 1-i\}$ von $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$ und wieder die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \quad z \mapsto cz \quad \text{mit} \quad c = a + ib \in \mathbb{C} .$$

Bezüglich $\mathcal{B} = \{1, i\}$ kennen wir die Abbildungsmatrix

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$



bereits; die Matrix des Basiswechsels ist offenbar

$$L = M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{also ist} \quad M = L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

und damit

$$A_{\mathcal{C}} = MAL = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch, wie angekündigt, kurz auf die rein formalen Verallgemeinerungen eingegangen, die für Abbildungen $\varphi: V \to W$ zwischen zwei nicht notwendigerweise gleichen Vektorräumen notwendig sind. Natürlich können wir weiterhin nur endlichdimensionale Vektorräume behandeln; sei also $\dim V = n$ und $\dim W = m$.

Als nächstes wählen wir eine Basis $\mathcal{B}$ von $V$ sowie eine Basis $\mathcal{B}'$ von $W$ und haben damit Isomorphismen $\psi_{\mathcal{B}}: V \to k^n$ und $\psi_{\mathcal{B}'}: W \to k^m$. Nun geht alles fast wörtlich genauso weiter wie oben im Fall $V = W$: Über die Abbildungskette

$$k^n \xrightarrow{\psi_{\mathcal{B}}^{-1}} V \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\psi_{\mathcal{B}'}} k^m$$

definieren wir eine lineare Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \underset{\text{def}}{=} \psi_{\mathcal{B}'} \circ \varphi \circ \psi_{\mathcal{B}}^{-1}: k^n \to k^m$$

und bezeichnen ihre Abbildungsmatrix $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in k^{m\times n}$ als die *Abbildungsmatrix von $\varphi$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.*

Auch den Effekt von Basiswechseln auf die Abbildungsmatrix können wir genau wie oben berechnen: Für weitere Basen $\mathcal{C}$ von $V$ und $\mathcal{C}'$ von $W$ ist

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} &= \psi_{\mathcal{C}'} \circ \varphi \circ \psi_{\mathcal{C}}^{-1} = \psi_{\mathcal{C}'} \circ (\psi_{\mathcal{B}'}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{B}'}) \circ \varphi \circ (\psi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \psi_{\mathcal{B}}) \circ \psi_{\mathcal{C}}^{-1} \\ &= (\psi_{\mathcal{C}'} \circ \psi_{\mathcal{B}'}^{-1}) \circ \varphi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \circ (\psi_{\mathcal{B}} \circ \psi_{\mathcal{C}}^{-1}) ; \end{aligned}$$

sind also $M$ und $L = M^{-1}$ die oben definierten Matrizen, durch die sich die Basisdarstellungen bezüglich $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ ineinander umrechnen lassen, und sind $M', L' = M'^{-1}$ die entsprechend definierten $m \times m$-Matrizen für $\mathcal{B}'$ und $\mathcal{C}'$, so ist

$$A_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} = M' A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} L \quad \text{und} \quad A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = L' A_{\mathcal{C},\mathcal{C}'} M .$$

### j) Affine Räume

Am anschaulichsten sind Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, da wir sie uns dort als Pfeile in der Ebene *bzw.* im Raum gut vorstellen können. Wir müssen allerdings unterscheiden zwischen der *Ebene* $\mathbb{R}^2$ und dem zweidimensionalen *Vektorraum* $\mathbb{R}^2$: Eine Ebene ist schließlich eine Menge von Punkten, während ein Vektorraum aus Vektoren besteht, die jeweils *zwei* Punkte verbinden. Erst wenn wir einen festen Punkt auszeichnen, können wir Vektoren und Punkte in eindeutige Beziehung zueinander setzen. Wir müssen daher unterscheiden zwischen dem Punkt $(x, y)$ aus der Ebenen $\mathbb{R}^2$ und dem Vektor $\binom{x}{y}$ aus dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$, der den Punkt $(0, 0)$ mit $(x, y)$ verbindet, aber beispielsweise auch den Punkt $(2-x, 3)$ mit $(2, 3+y)$. Der Begriff des affinen Raums formalisiert diese Unterscheidung:

**Definition:** Ein affiner Raum über dem Körper $k$ ist gegeben durch ein Paar $(A, V)$ bestehend aus einer nichtleeren Menge $A$, deren Elemente wir als Punkte bezeichnen, und einem Vektorraum $V$, so daß gilt:

1.) Es gibt eine Abbildung $\varphi\colon \begin{cases} A \times A \to V \\ (P, Q) \mapsto \overrightarrow{PQ} \end{cases}$, mit der Eigenschaft, daß
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR} \quad \text{für alle } P, Q, R \in A .$$

2.) Für jeden Punkt $O \in A$ gibt es eine Abbildung $\psi_O\colon V \to A$, die jedem Vektor $\vec{v} \in V$ einen Punkt $\psi_O(\vec{v})$ zuordnet, für den
$$\varphi\big(O, \psi_O(\vec{v})\big) = \overrightarrow{O\psi_O(\vec{v})} = \vec{v}$$
ist.

Die Dimension des Vektorraums $V$ bezeichnen wir auch als Dimension des affinen Raums.



Anschaulich gesehen ordnet die Abbildung $\varphi$ zwei Punkten $P, Q \in A$ den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ zu, und $\psi$ beschreibt das *Abtragen* eines Vektors: In §1 hatten wir Vektoren eingeführt als Äquivalenzklassen von Pfeilen gleicher Länge und gleicher Richtung; nimmt man zum Vektor $\vec{v}$ den Pfeil, der im Punkt $O$ beginnt, so hat dieser den Endpunkt $\psi_O(\vec{v})$.

Standardbeispiel eines affinen Raums ist natürlich der $\mathbb{R}^n$; hier ist $A$ gleich der *Menge* $\mathbb{R}^n$, deren Elemente wir als Punkte $(x_1, \dots, x_n)$ schreiben, und $V$ ist gleich dem *Vektorraum* $\mathbb{R}^n$, dessen Elemente wir als Spaltenvektoren schreiben. $\varphi$ ist die Abbildung, die den Punkten

$$P = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{und} \quad Q = (y_1, \dots, y_n)$$

deren Verbindungsvektor

$$\varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_n - x_n \end{pmatrix}$$

zuordnet, und für $O = (a_1, \dots, a_n)$ ist

$$\psi_O\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = (a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n) .$$

Ganz entsprechend läßt sich für jeden beliebigen Körper $k$ die Menge $k^n$ zu einem affinen Raum machen; der zugehörige Vektorraum ist natürlich der *Vektorraum* $k^n$.

Weitere interessante Beispiele sind vor allem die Geraden, Ebenen *usw.* in diesem Raum; diese fassen wir zusammen unter der

**Definition:** Ein affiner Unterraum des affinen Raums $(A, V)$ ist ein affiner Raum $(B, U)$ mit $B \subseteq A$ und $U \le V$, wobei auch die Abbildungen $\varphi$ und $\psi_O$ Einschränkungen der entsprechenden Abbildungen von $(A, V)$ sind.

Betrachten wir etwa die Gerade

$$\big\{(1 + \lambda, \lambda) \bigm| \lambda \in \mathbb{R}\big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$