vertierbar, da man jede Permutation auch wieder rückgängig machen kann.

Da man im GAUSS-Algorithmus stets durch Zeilenvertauschungen und Eliminationsschritte zur Endgestalt kommen kann, gibt es daher zu jeder beliebigen Matrix $A \in k^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so daß

$$LPA = R$$

ist. Da P und L invertierbar sind, kann man dies auch als

$$A = P^{-1}L^{-1}R$$

schreiben, d.h. jede Matrix läßt sich schreiben als Produkt einer Permutationsmatrix, einer unteren Dreiecksmartrix und einer oberen Dreiecksmatrix. Wichtiger ist allerdings die obige Darstellung $LPA = R$, denn sie gestattet es, ein beliebiges Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

in das einfacher zu lösende Gleichungssystem

$$R\vec{x} = LP\vec{b}$$

überzuführen; nach Berechnung der beiden Matrizen R und LP lassen sich also solche Gleichungssysteme mit wechselnden rechten Seiten effizient lösen.

Nachdem die LR-Zerlegung somit durchaus recht nützlich ist, stellt sich noch die Frage, wie man sie am besten berechnet. Das oben skizzierte Verfahren zur Herleitung der LR-Zerlegung ist natürlich *im Prinzip* auch rechnerisch durchführbar, allerdings ist der Gedanke an eine Matrixmultiplikation für *jede einzelne* Zeilenoperation nicht gerade attraktiv.

Eine bessere Methode liefert, wie so oft in der linearen Algebra, der GAUSS-Algorithmus: Die Endform eines linearen Gleichungssystems nach Durchführung aller Eliminationsschritte macht aus der ursprünglichen Matrix A des Gleichungssystems die Matrix $LA = R$; zumindest diese berechnet der GAUSS-Algorithmus also direkt.

L erhalten wir, wenn wir uns überlegen, welche Funktion diese Matrix hat: Sie gibt an, welche Zeilenoperationen ausgeführt werden. Ist also $\vec{b}$ eine rechte Seite, so ist $L\vec{b}$ die rechte Seite des Gleichungssystem nach Durchführung der Eliminationsschritte. Wenn wir entsprechend neben die Matrix A noch eine Matrix B schreiben und mit dieser alle Zeilenoperationen genauso ausführen wie mit A, so steht nachher rechts die Matrix LB. Speziell für $B = E$ ist dies L selbst, d.h. das algorithmische Verfahren zur Bestimmung der LR-Zerlegung ist gerade die erste Hälfte des Verfahrens zur Bestimmung der inversen Matrix: Wir schreiben die Matrizen A und E nebeneinander und führen die Eliminationsschritte des GAUSS-Algorithmus durch; danach haben wir die Matrizen $LA = R$ und $LE = L$.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Hier müssen wir vor der Anwendung des GAUSS-Algorithmus offensichtlich Zeilen vertauschen, z.B. die erste und die zweite. Dies entspricht einer Multiplikation mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führt auf

$$A' = PA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Wir schreiben die Einheitsmatrix daneben:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Sechs links unten wird eliminiert durch Subtraktion der zweifachen ersten Zeile von der letzten:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Endgestalt entsteht daraus, wenn man nun noch die zweite Zeile zur dritten addiert:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier steht links die Matrix R, rechts steht L, d.h.

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

In der Tat rechnet man leicht nach, daß

$$LPA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R$$

ist.

§5: Vektorräume und lineare Abbildungen

Wir begannen dieses Kapitel mit Vektoren im $\mathbb{R}^3$, haben dann gesehen, daß sich zumindest ein Teil des dort Gelernten auf Vektoren beliebiger Dimension $n \in \mathbb{N}$ über einem beliebigen Körper k übertragen läßt und wollen jetzt schließlich als letzte Stufe der Verallgemeinerung sehen, daß sich auch viele andere mathematische Objekte wie reelle oder komplexe Funktionen, Matrizen *usw.* gelegentlich mit Erfolg als „Vektoren" interpretieren lassen. Das formale Hilfsmittel dazu ist der Begriff des abstrakten *Vektorraums.*

a) Definition des Vektorraums

Definition: k sei ein Körper. Eine Menge V heißt *Vektorraum* über k oder k-Vektorraum, wenn gilt:

I. V ist eine abelsche Gruppe, d.h.

1.) Für alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ gilt

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u} .$$

2.) Für alle $\vec{u}, \vec{v}.\vec{w} \in V$ gilt

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) .$$

3.) Es gibt einen Vektor $\vec{0} \in V$, so daß für jeden Vektor $\vec{v} \in V$ gilt

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} .$$

4.) Zu jedem Vektor $\vec{v} \in V$ gibt es einen Vektor $-\vec{v} \in V$, so daß

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0} .$$

II. V hat eine k-Modulstruktur, d.h. es gibt eine Verknüpfung

$$\begin{cases} k \times V \to V \\ (\lambda, \vec{v}\,) \mapsto \lambda\vec{v} \end{cases} ,$$

so daß gilt:

1.) Für alle $\lambda, \mu \in k$ und alle $\vec{v} \in V$ gilt

$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v} .$$

2.) Für alle $\lambda \in k$ und alle $\vec{v}, \vec{w} \in V$ gilt

$$\lambda(\vec{v} + \vec{w}) = \lambda\vec{v} + \lambda\vec{w} .$$

3.) Für alle $\vec{v} \in V$ ist

$$1\vec{v} = \vec{v} .$$

4.) Für alle $\vec{v} \in V$ und alle $\lambda \in k$ ist

$$0\vec{v} = \vec{0} \quad \text{und} \quad \lambda\vec{0} = \vec{0} .$$

b) Erste Beispiele

Da Vektorräume Verallgemeinerungen von $\mathbb{R}^3$ und k^n sein sollen, sollte man sich als allererstes davon überzeugen, daß beides in der Tat Vektorräume im Sinne obiger Definition sind; aus den in §§1–2 zusammengestellten Rechenregeln folgt dies sofort.

Ebenfalls aus den in §2 zusammengestellten Rechenregeln folgt auch, daß die Menge $k^{n\times m}$ aller $n \times m$-Matrizen mit der Matrizenaddition und der Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ein k-Vektorraum ist.

Weiter sind die komplexen Zahlen ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, wenn wir als Addition die gewöhnliche Addition komplexer Zahlen betrachten und als Multiplikation mit einem Skalar die Multiplikation einer reellen mit einer komplexen Zahl.

Genauso ist auch $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum: Vektoraddition ist die Addition reeller Zahlen und Multiplikation mit Skalaren die Multiplikation von rationalen und reellen Zahlen.

Schließlich ist auch für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ und jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$\mathcal{C}^n(U,\mathbb{R}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist } n\text{-mal stetig differenzierbar} \right\}$$

ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Addition

$$f+g\colon \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x)+g(x) \end{cases}$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda f\colon \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \lambda f(x)\,, \end{cases}$$

denn die Summe zweier stetiger *bzw.* differenzierbarer Funktionen ist wieder stetig *bzw.* differenzierbar, und wegen der Rechenregel $(f+g)' = f' + g'$ gilt dies auch für die höheren Ableitungen. Genauso kann man auch für λf argumentieren.

Ganz entsprechend lassen sich auch die Mengen

$$\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig} \right\}$$

und

$$\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist beliebig oft differenzierbar} \right\}$$

sowie

$$\mathcal{C}^\omega(U,\mathbb{R}) = \left\{ f\colon U \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ ist um jeden Punkt } x \in U \text{ durch} \\ \text{eine TAYLOR-Reihe darstellbar} \end{array} \right\}$$

zu $\mathbb{R}$-Vektorräumen machen.

Als trivialstes Beispiel überhaupt haben wir schließlich noch über jedem Körper k den Nullvektorraum, der nur aus dem Nullvektor $\vec{0}$ besteht.

c) Lineare Abhängigkeit

Im $\mathbb{R}^3$ definieren zwei Vektoren eine Ebene – es sei denn, sie liegen, wenn man sie am gleichen Anfangspunkt beginnen läßt, auf einer Geraden, d.h einer der beiden Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.

Entsprechend spannen drei Vektoren im allgemeinen den ganzen $\mathbb{R}^3$ auf – es sei denn, sie liegen, wenn man sie am gleichen Anfangspunkt beginnen läßt, in einer Ebenen, d.h. einer der drei ist als Summe von Vielfachen der anderen beiden darstellbar.

Der Begriff der *linearen Abhängigkeit* verallgemeinert diese Ausnahmebedingungen so, daß sie auf beliebige Vektorräume angewandet werden können:

Definition: M sei eine Teilmenge des k-Vektorraums V.

a) Eine *Linearkombination* von Vektoren aus M ist eine Summe der Form

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in k$ und paarweise verschiedenen Vektoren $\vec{v}_i \in M$; ist diese Summe gleich dem Vektor $\vec{v} \in V$, so sagen wir, $\vec{v}$ sei als Linearkombination von Vektoren aus M darstellbar.

b) Die Menge aller Vektoren, die sich als Linearkombination von Vektoren aus M darstellen lassen, bezeichnen wir mit $[M]$; wir nennen sie das *Erzeugnis* von M.

c) Eine Linearkombination wie in *a)* heißt *nichttrivial,* falls mindestens ein λ_i von Null verschieden ist; ansonsten heißt sie *trivial.*

d) Die Menge M heißt *linear unabhängig,* wenn der Nullvektor nicht als eine nichttriviale Linearkombination von Vektoren aus M darstellbar ist, d.h. wann immer

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda\vec{v}_n = \vec{0}$$

für Vektoren $\vec{v}_i \in M$ und Skalare $\lambda_i \in k$, müssen alle λ_i verschwinden.

e) Ist M *nicht* linear unabhängig, nennen wir die Menge M *linear abhängig.*

Im (häufigsten) Fall einer endlichen Menge $M = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r\}$ sagen wir kurz, die *Vektoren* $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_r$ seien linear (un)abhängig, falls M diese Eigenschaft hat.

Beispielsweise sind also die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig, da der zweite das Zweifache des ersten ist, und auch die Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind linear abhängig, denn

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda + 2\mu + \nu\\3\mu + \nu\\0\end{pmatrix}$$

ist gleich dem Nullvektor wann immer $\nu = -3\mu$ und $\lambda = -2\mu - \nu = \mu$ ist, also ist beispielsweise

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

Die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sind dagegen linear unabhängig, denn

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix}$$

ist genau dann gleich dem Nullvektor, wenn alle λ_i verschwinden.

Auch in komplizierteren Vektorräumen können wir leicht Beispiele für lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit finden. In $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind etwa Sinus und Cosinus linear unabhängig, denn gäbe es $\lambda_{1/2} \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

mit $\lambda_1 \neq 0$, wäre

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

eine konstante Funktion; wäre $\lambda_2 \neq 0$ könnten wir entsprechend auf die Konstanz des Cotangens schließen.

Entsprechend sind auch die Funktionen $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ linear unabhängig, denn auch die Quadrate von Tangens und Cotangens sind nichtkonstante Funktionen. Dagegen sind die drei Funktionen $\sin^2 x,\ \cos^2 x$ und die konstante Funktion 1 linear abhängig, denn

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,.$$

Lemma: Falls die Menge $M \subseteq V$ linear abhängig ist, gibt es ein Element $\vec{v} \in M$, das sich als Linearkombination der übrigen, d.h. von Vektoren aus $M \setminus \{\vec{v}\}$ schreiben läßt.

Beweis: Wenn M linear abhängig ist, gibt es eine nichttriviale Linearkombination von Vektoren $\vec{v}_i \in M$, so daß

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

ist mit Körperelementen λ_i, die nicht alle gleich Null sind. Sei zum Beispiel $\vec{\lambda}_j \neq 0$. Dann kann obige Gleichung nach $\vec{v}_j$ aufgelöst werden; für $1 < j < n$ etwa ist

$$\vec{v}_j = -\frac{\lambda_1}{\lambda_j}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_{j-1}}{\lambda_j}\vec{v}_{j-1} - \frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j}\vec{v}_{j+1} - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_j}\vec{v}_n\,,$$

und entsprechend läßt sich $\vec{v}_j$ auch im Falle $j = 1$ oder $j = n$ als Linearkombination der übrigen $\vec{v}_i$ schreiben. ∎

d) Die Dimension eines Vektorraums

Die Dimension eines Vektorraums soll natürlich so definiert werden, daß k^n die Dimension n hat; wir müssen die Zahl n also irgendwie als Eigenschaft von (Mengen von) Vektoren aus k^n rekonstruieren.

Oben wurde gezeigt, daß die drei Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig sind; genauso folgt natürlich die lineare Unabhängigkeit von

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \in k^n .$$

Es fällt allerdings schwer, sich $n + 1$ linear unabhängige Vektoren in k^n vorzustellen, und in der Tat wird für $n + 1$ Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1} \in k^n$ die Gleichung

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \cdots + \lambda_{n+1}\vec{v}_{n+1} = \vec{0}$$

zu einem homogenen linearen Gleichungssystem für die λ_i, das aus n Gleichungen für $n + 1$ Variablen besteht. Wenden wir den GAUSS-Algorithmus auf ein solches Gleichungssystem an, kann die Endform explizite Gleichungen für höchstens n der Variablen liefern, mindestens eine ist also frei wählbar und kann damit insbesondere auf ein von Null verschiedenes Element von k gesetzt werden. Damit gibt es also nichttriviale Linearkombinationen der Null aus $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n+1}$.

Diese Eigenschaft machen wir uns nun zunutze, um allgemein Dimensionen zu definieren:

Definition: Wir sagen, der k-Vektorraum V habe die Dimension n, in Zeichen

$$n = \dim_k V \quad \text{oder kurz} \quad n = \dim V ,$$

wenn es in V einerseits n linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ gibt, andererseits aber jede Teilmenge aus mehr als n Vektoren linear abhängig ist. Dem Nullvektorraum ordnen wir formal die Dimension Null zu.

Falls ein Vektorraum die Dimension Null oder eine Dimension $n \in \mathbb{N}$ hat, sagen wir, er sei *endlichdimensional;* andernfalls nennen wir ihn *unendlichdimensional.*

In diesem Sinne ist also k^n ein n-dimensionaler Vektorraum. Unendlichdimensionale Vektorräume sind beispielsweise $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, denn offensichtlich ist die unendliche Menge der Potenzfunktionen $x \mapsto x^r$ linear unabhängig, da es ansonsten ein von Null verschiedenes Polynom gäbe, das nur den Wert Null annimmt.

Weniger offensichtlich ist, daß auch $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlichdimensional ist: Dazu betrachten wir die unendliche Menge M aller Logarithmen $\ln p$ der Primzahlen. Wäre diese Menge linear abhängig, gäbe es eine nichttriviale Linearkombination

$$\lambda_1 \ln p_1 + \cdots + \lambda_r \ln p_r = 0$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. Multipliziert man diese Gleichung mit dem Hauptnenner der λ_i, so erhält man eine entsprechende Gleichung mit $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\lambda_1 \ln p_1 + \cdots + \lambda_r \ln p_r = \ln(p_1^{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot p_r^{\lambda_r}) = 0$$

gleichbedeutend mit

$$p_1^{\lambda_1} \cdot \cdots \cdot p_r^{\lambda_r} = 1 ,$$

was wegen der Eindeutigkeit der Primzerlegung in $\mathbb{Z}$ nur gelten kann, wenn alle λ_i verschwinden.

Also ist $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlichdimensional, und dies erklärt, warum Computer so große Schwierigkeiten mit reellen Zahlen haben: Exakt rechnen kann ein Computer nur in Teilkörpern von $\mathbb{R}$, die endlichdimensionale $\mathbb{Q}$-Vektorräume sind. Vor allem in der Computergraphik, wo man die logische und geometrische Konsistenz der Daten nur erhalten kann, wenn man *sicher* entscheiden kann, ob etwa zwei als Schnittpunkte von Kurven gegebene Punkte gleich sind oder nicht, ist dies ein großes, wenn auch kein unlösbares, Problem.

e) Basen

Im $\mathbb{R}^3$ läßt sich jeder Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf genau eine Weise als Linearkombination der drei Einheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

schreiben; die entspricht der Tatsache, daß wir im $\mathbb{R}^3$ drei Koordinaten haben.

Mit dem Begriff der *Basis* soll dieser Sachverhalt (soweit möglich) auf beliebige Vektorräume verallgemeinert werden.

Definition: Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset V$ eines k-Vektorraums V heißt *Basis* von V, wenn gilt:

1. $V = [\mathcal{B}]$
2. $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig.

In diesem Sinne ist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ offenbar eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Ihre wesentliche Eigenschaft der eindeutigen Darstellbarkeit eines jeden Vektors als Linearkombination teilt sie mit jeder beliebigen Basis:

Lemma: Ist $\mathcal{B}$ eine Basis eines Vektorraums V, so läßt sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination

$$\vec{v} = \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{b}_r$$

von Basisvektoren $\vec{b}_i \in \mathcal{B}$ darstellen.

Beweis: Nach der ersten Eigenschaft in der Definition einer Basis ist $V = [\mathcal{B}]$, also läßt sich jeder Vektor $\vec{v} \in V$ als eine Linearkombination von endlich vielen Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellen. Auch wenn wir von

zwei solchen Darstellungen ausgehen, ist die Menge der daran beteiligten Vektoren aus $\mathcal{B}$ noch endlich; wir können also annehmen, daß es r Vektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ gibt, so daß

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lambda_1\vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r\vec{b}_r \\ &= \mu_1\vec{b}_1 + \cdots + \mu_r\vec{b}_r \end{aligned}$$

ist, wobei wir einfach λ_i oder μ_i auf Null setzen, wenn $\vec{b}_i$ in der entsprechenden Darstellung nicht vorkommt. Subtrahieren wir die beiden Darstellungen voneinander, erhalten wir eine Darstellung des Nullvektors als Linearkombination

$$\vec{0} = (\lambda_1 - \mu_1)\vec{b}_1 + \cdots + (\lambda_r - \mu_r)\vec{b}_r$$

von Vektoren aus der Menge $\mathcal{B}$. Da diese nach der zweiten definierenden Eigenschaft einer Basis linear unabhängig ist, müssen alle Koeffizienten $\lambda_i - \mu_i$ verschwinden. Damit sind die beiden betrachteten Darstellungen von $\vec{v}$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$ gleich, mit anderen Worten: Es gibt genau eine solche Darstellung. ■

Als nächstes stellt sich die Frage, wann es Basen gibt. Glücklicherweise hat *jeder* Vektorraum eine Basis, der Beweis ist allerdings für unendlichdimensionale Vektorräume logisch nicht ganz einfach. Für diese Vorlesung wollen wir uns daher begnügen mit dem Beweis für endlichdimensionale Vektorräume. Wir beweisen dazu den etwas allgemeineren, tatsächlich ebenfalls für beliebige Vektorräume gültigen

Basisergänzungssatz: $\emptyset \neq M \subset V$ sei eine linear unabhängige Teilmenge des endlichdimensionalen Vektorraums V. Dann gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V, die M enthält.

Beweis: Wir überlegen uns zunächst, daß es überhaupt eine endliche Menge $E \subset V$ gibt, so daß $V = [E]$ von E erzeugt wird.

Als endlichdimensionaler Vektorraum hat V eine Dimension $n \in \mathbb{N}$, d.h. es gibt eine Menge $E = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ von n linear unabhängigen Vektoren aus V, wohingegen jede Menge aus mehr als n Vektoren linear abhängig ist. Insbesondere ist also für jeden Vektor $\vec{v} \notin E$ die Menge

$E \cup \{\vec{v}\}$ linear abhängig, d.h. es gibt Elemente $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in k$, die nicht alle verschwinden, so daß

$$\lambda_0 \vec{v} + \lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

ist. Wäre in dieser Gleichung $\lambda_0 = 0$, müßte mindestens ein anderes λ_i von Null verschieden sein, und wir hätten eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren aus E, im Widerspruch zur Wahl von E. Somit ist $\lambda_0 \neq 0$ und

$$\vec{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\vec{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_0}\vec{v}_n$$

ist als Linearkombination von Elementen aus E darstellbar. Also ist $V = [E]$ von E erzeugt und damit erst recht auch von $M \cup E$.

Sei $M = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r\}$; wenn wir die $\vec{v}_i$ so anordnen, daß die eventuell vorhandenen $\vec{v}_i \in M$ an den letzten Stellen stehen, gibt es dann ein $s \leq n$, so daß

$$M \cup E = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_s\}$$

ist. Falls diese Menge linear unabhängig ist, sind wir fertig, denn dann ist sie eine Basis von V, die M enthält.

Andernfalls gibt es Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ und $\mu_1, \ldots, \mu_s$, die nicht alle gleichzeitig verschwinden, so daß

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \cdots + \lambda_r \vec{b}_r + \mu_1 \vec{v}_1 + \cdots + \mu_s \vec{v}_s = \vec{0}$$

ist. In dieser Gleichung können nicht alle μ_i Null sein, denn sonst wären die $\vec{b}_i$ linear abhängig, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also gibt es (mindestens) ein $\mu_i \neq 0$, und der zugehörige Vektor $\vec{v}_i$ läßt sich als Linearkombination der restlichen $\vec{v}_j$ und der $\vec{b}_\ell$ ausdrücken.

Damit wird $V = [M \cup E \setminus \{\vec{v}_i\}]$ auch von der um $\vec{v}_i$ verminderten Menge erzeugt; falls diese linear unabhängig ist, sind wir fertig. Andernfalls können wir auf genau die gleiche Weise weitere Vektoren $\vec{v}_h$ eliminieren, bis die Menge – spätestens nach Elimination aller Vektoren aus E – linear unabhängig wird. Da sich durch diese Eliminationen nichts an der Erzeugung des gesamten Vektorraums V ändert, haben wir damit eine Basis gefunden, die M enthält.

■

Korollar: Jeder endlichdimensionale Vektorraum $V \neq \{\vec{0}\}$ hat eine Basis.

Beweis: Man wende den obigen Satz an auf eine Menge M, die aus einem einzigen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ besteht.

■

Um die Sonderrolle des Nullvektorraums zu eliminieren, vereinbaren wir, daß er die leere Menge als Basis haben soll; dies ist kompatibel mit der üblichen Interpretation von leeren Summen.

Wie bereits erwähnt, gelten sowohl der Basisergänzungssatz als auch das obige Korollar für beliebige Vektorräume, d.h. also auch im Falle unendlicher Dimension. Für interessierte Leser sei kurz erwähnt, wie man hier vorgeht. Das wesentliche neue Hilfsmittel ist das ZORNsche Lemma, benannt nach dem deutschen Mathematiker MAX ZORN (1906–1993), der es, nachdem er Deutschland wegen der nationalsozialistischen Politik verlassen mußte, um 1935 an der amerikanischen Yale Universität bewies. Es besagt folgendes:

Gegeben sei eine nichtleere partiell geordnete Menge $\mathcal{M}$, d.h. für manche Paare von Elementen $A, B \in \mathcal{M}$ ist eine Relation $A < B$ erklärt mit der Eigenschaft, daß mit $A < B$ und $B < C$ auch $A < C$ gilt, wohingegen nie $A < A$ ist. Diese partiell geordnete Menge habe die zusätzliche Eigenschaft, daß es zu jeder Kette

$$A_1 < A_2 < A_3 < \cdots$$

von Elementen aus $\mathcal{M}$ ein Element A_∞ gebe mit der Eigenschaft, daß $A_i < A_\infty$ für alle i. Dann gibt es in $\mathcal{M}$ ein *maximales* Element, d.h. ein Element B, zu dem es kein $C \in \mathcal{M}$ gibt mit $B < C$.

Daraus folgt in der Tat sehr schnell der Basisergänzungssatz: Als Menge $\mathcal{M}$ nehmen wir die Menge aller linear unabhängiger Teilmengen $A \subset V$, die M enthalten; die partielle Ordnungsrelation sei die gewöhnliche (echte) Teilmengenbeziehung. Die Kettenbedingung des ZORNschen Lemmas ist offensichtlich erfüllt, denn für eine Kette

$$M \subset A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

aus linear unabhängigen Mengen A_i, die M enthalten, ist auch

$$A_\infty = \bigcup_{i \geq 1} A_i$$

eine linear unabhängige Teilmenge von V, die M enthält, da jede endliche Menge von Vektoren aus A_∞ bereits in einer der Mengen A_m liegt. Also gibt es nach dem ZORNschen Lemma ein maximales Element $\mathcal{B} \in \mathcal{M}$. Diese Menge $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig, da sie in $\mathcal{M}$ liegt, und sie ist eine Basis, denn gäbe es einen Vektor $\vec{v} \notin [\mathcal{B}]$, so wäre auch die Menge $\mathcal{C} = \mathcal{B} \cup \{\vec{v}\}$ linear unabhängig, im Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{B}$. Damit ist der Basisergänzungssatz bewiesen, und das Korollar folgt wie oben.

Das ZORNsche Lemma kann nicht aus den üblichen Axiomen der Mengenlehre hergeleitet werden, sondern ist äquivalent zum sogenannten *Auswahlaxiom.* Für dieses bewies der österreichische Mathematiker KURT GÖDEL (1906–1978), seit 1940 im amerikanischen Exil in Princeton, um 1940, daß sowohl dieses Axiom als auch seine Negation mit den restlichen Axiomemn der Mengenlehre kompatibel ist; das gleiche gilt demnach auch für das ZORNsche Lemma. Man kann daher wählen, ob man eine Mathematik mit oder ohne ZORNsches Lemma bevorzugt; die meisten Mathematiker haben sich für „mit" entschieden, es gibt aber auch Logiker, die das ZORNsche Lemma ablehnen.

Um wenigstens anhand eines Beispiels zu sehen, daß auch unendlichdimensionale Vektorräume Basen haben, betrachten wir den Vektorraum V aller Polynome mit reellen Koeffizienten. Da sich ein Polynom P vom Grad d als

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_d X^d$$

schreiben läßt, erzeugt die Menge

$$\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, \dots\}$$

diesen Vektorraum, und jede Linearkombination des Nullvektors, des Polynoms $P = 0$ also, aus Elementen von $\mathcal{B}$ wäre ein Polynom

$$\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n ,$$

dessen Koeffizienten zumindest teilweise von Null verschieden sind, während es selbst identisch Null wäre. Da es kein solches Polynom gibt, ist die Menge $\mathcal{B}$ linear unabhängig, also eine Basis von V.

Die Schwierigkeiten, die bei unendlichdimensionalen Vektorräumen auftreten können, sieht man, wenn man in diesem Beispiel die Polynome durch Potenzreihen (egal ob formal oder konvergent) ersetzt: Da Potenzreihen *unendliche* Summen sind, während bei Linearkombinationen nur *endliche* Summen erlaubt sind, reichen nun die X-Potenzen nicht mehr aus zur Erzeugung. Nach dem Basisergänzungssatz, der, auch wenn wir das nicht bewiesen haben, auch für unendlichdimensionale Vektorräume gilt, gibt es eine Menge von Potenzreihen, die zusammen mit der obigen Menge $\mathcal{B}$ eine Basis bilden; explizit angeben konnte diese Menge noch niemand.

Kehren wir also zurück zum überschaubareren endlichdimensionalen Fall, und beweisen wir dort zunächst einen anschaulich fast selbstverständlichen Satz:

Satz: Jede Basis $\mathcal{B}$ eines n-dimensionalen Vektorraums besteht aus n Vektoren.

Beweis: Es ist klar, daß keine Basis *mehr* als n Vektoren enthalten kann; denn in einem n-dimensionalen Vektorraum sind alle Mengen aus mehr als n Vektoren linear abhängig. Wenn $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$ *weniger* als n Vektoren enthält, erwarten wir, daß es Probleme mit der Erzeugung des Vektorraums gibt: Nach Definition gibt es n linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ in V, und wenn $\mathcal{B}$ eine Basis ist, müssen auch alle $\vec{v}_i$ als Linearkombinationen der $\vec{b}_j$ darstellbar sein, also etwa

$$\vec{v}_i = a_{i1}\vec{b}_1 + \cdots + a_{im}\vec{b}_m .$$

Eine Linearkombination

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + x_n \cdot \vec{v}_n$$

läßt sich daher in den $\vec{b}_j$ ausdrücken als

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\vec{b}_j .$$

Eine solche Summe ist wegen der linearen Unabhängigkeit der $\vec{b}_j$ genau dann gleich dem Nullvektor, wenn die Koeffizienten aller $\vec{b}_j$ verschwinden, wenn also gilt

$$a_{1j}x_1 + \cdots + a_{nj}x_n = 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, m.$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem von $m < n$ Gleichungen für n Unbekannte; nachdem die GAUSSschen Eliminationsschritte ausgeführt sind, können also höchstens m der x_i festgelegt sein, so daß noch mindestens $n - m$ frei und damit insbesondere ungleich Null gewählt werden können.

Damit gibt es also eine nichttriviale Möglichkeit, den Nullvektor aus den linear unabhängigen Vektoren $\vec{v}_i$ linear zu kombinieren, ein Widerspruch. Somit kann $\mathcal{B}$ keine Basis sein.

Insgesamt haben wir also gesehen, daß weder Basen mit mehr noch Basen mit weniger als n Elementen möglich sind, d.h. jede Basis besteht aus genau n Vektoren. ■