als die *erweiterte Matrix.*

Die verschiedenen Schritte des GAUSS-Algorithmus wirken sich auf die Matrix wie auch auf die erweiterte Matrix so aus, daß entweder zwei Zeilen miteinander vertauscht werden, oder aber ein Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addiert wird – Addition bedeutet dabei die gewöhnliche komponentenweise Addition, d.h. die Addition von Zeilenvektoren.

Nachdem wir diese Operationen solange wie möglich ausgeführt haben, bekommt die erweiterte Matrix die Form

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc}
[0] & \bullet & [\star] & \star & [\star] & \star & \dots & [\star] & \star & [\star] & \star \\
[0] & 0 & [0] & \bullet & [\star] & \star & \dots & [\star] & \star & [\star] & \star \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & \bullet & \dots & [\star] & \star & [\star] & \star \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & \bullet & [\star] & \star \\
\hline
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & \bullet \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & \bullet \\
\hline
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[0] & 0 & [0] & 0 & [0] & 0 & \dots & [0] & 0 & [0] & 0
\end{array}\right),$$

wobei $\bullet$ für ein von Null verschiedenes und $\star$ für ein beliebiges Element des Körpers k steht; [0] und [$\star$] stehen für keine, eine oder mehrere Nullen *bzw.* beliebige Elemente, deren Anzahl in untereinanderstehenden Termen jeweils die gleiche sein soll.

Die Zeilen zwischen den beiden eingezeichneten Linien, in denen alle Einträge der Matrix des Gleichungssystems verschwinden, müssen natürlich nicht wirklich auftreten, genauso wenig die Zeilen unterhalb der zweiten Linie, wo sogar alle Einträge der erweiterten Matrix verschwinden, so daß auch die rechten Seiten der entsprechenden Gleichungen in der Endgestalt nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus Null sind.

Falls zwischen den beiden eingezeichneten Linien wirklich eine oder mehrere Zeilen stehen, ist das Gleichungssystem *unlösbar,* denn dann gibt es ja in der Endform des Gleichungssystems Gleichungen, in denen links alle Koeffizienten Null sind, während rechts eine von Null verschiedene Zahl steht. Indem man gegebenenfalls ein Vielfaches der ersten solchen Gleichung von den etwa vorhandenen weiteren Gleichungen subtrahiert, kann man erreichen, daß alle weiteren Gleichungen zu 0 = 0 werden, d.h. wir können erreichen, daß zwischen den beiden Linien *höchstens eine* Zeile steht, und das lineare Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn keine dort steht.

Um diese Situation durch ein numerisches Kriterium zu beschreiben, definieren wir die Anzahl der Zeilen oberhalb der ersten Linie als *Rang der Matrix* A und die Anzahl der Zeilen oberhalb der zweiten Linie (nachdem man dafür Sorge getragen hat, daß höchstens eine Zeile zwischen den beiden Linien steht) als *Rang der erweiterten Matrix.* Der Rang ist also jeweils die Anzahl von Zeilen, die auch nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus einschließlich der gerade diskutierten weiteren Operationen noch von Null verschiedene Elemente enthalten, und der Rang des erweiterten Matrix ist entweder gleich dem Rang der Matrix oder um eins größer.

Bevor wir allgemein mit diesen beiden Zahlen arbeiten, betrachten wir zunächst ein Beispiel: Im vorigen Abschnitt hatten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & - & 7x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & - & 7x_6 & = & -8
\end{array}$$

als unlösbar erkannt. Seine erweiterte Matrix ist

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 10 \\
2 & 2 & 0 & -4 & -6 & 2 & 12 \\
6 & -3 & 1 & 5 & 0 & -3 & 15 \\
4 & -7 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
2 & -7 & 1 & 13 & 12 & -7 & -8
\end{pmatrix},$$

und nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus kommen wir auf die Endgestalt

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & 0 & -4 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 62 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 6 & 0 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Somit hat die Matrix des linearen Gleichungssystems den Rang vier, wohingegen die erweiterte Matrix den Rang fünf hat.

Ändern wir im Gleichungssystem die rechte Seite der letzten Gleichung von -8 zu -9, so wird es lösbar. In der Endgestalt ändert sich, wie wir oben gesehen haben, auch nur die rechte Seite der letzten Gleichung, die erweiterte Matrix wird also schließlich zu

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 2 & 0 & -4 & -6 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 62 & 0 & 0 & 69 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 6 & 0 & 6 \\ \hline\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Hier haben Matrix und erweiterte Matrix denselben Rang vier.

Allgemein gilt:

Satz: *a)* Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ hat genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn der Rang der Matrix A gleich dem Rang der erweiterten Matrix $\left(A \mid \vec{b}\right)$ ist.
b) Falls $A \in k^{n\times m}$ und $n = m = \operatorname{Rang} A$, hat das Gleichungssystem genau eine Lösung $(x_1, \ldots, x_m)$.

Beweis: Der Rang der erweiterten Matrix kann natürlich nicht kleiner sein als der der Matrix selbst, und wenn er größer wird, bekommen wir Gleichungen der Form $0 = a$ mit $a \neq 0$, aus denen die Unlösbarkeit des Gleichungssystems folgt; falls es also Lösungen gibt, müssen die beiden Ränge gleich sein.

Falls sie gleich sind, gibt es keine Zeilen zwischen den beiden Strichen, und unter dem zweiten Strich stehen nur Nullen, die trivialerweise

erfüllten Gleichungen $0 = 0$ entsprechen; wir können uns also auf die Zeilen oberhalb des ersten Strichs beschränken. Jede dieser Zeilen beginnt nach einer Reihe von Nullen mit einem $\bullet$, entspricht also einer Gleichung der Form

$$c_i x_i + c_{i+1} x_{i+1} + \ldots + c_m x_m = d$$

mit $c_i \neq 0$. Wenn wir von unten anfangen und uns dann nach oben hocharbeiten, sind die x_j mit $j > i$ entweder bereits aus weiter unten stehenden Gleichungen bekannt, oder aber sie treten zum ersten Mal auf und können beliebig gewählt werden; nach dieser Wahl ist

$$x_i = \frac{d - c_{i+1} x_{i+1} - \ldots - c_m x_m}{c_i}$$

eindeutig bestimmt. Insbesondere gibt es also Lösungen, und in der Situation von Teil *b),* wo die erweiterte Matrix der Endgestalt die Form

$$\begin{pmatrix} \bullet & \star & \ldots & \star & \star \\ 0 & \bullet & \ldots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \bullet & \star \end{pmatrix}$$

hat, ist jedes x_i eindeutig bestimmt. ∎

d) Ausblick: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme

Mancher Leser mag sich in die Mittelstufe zurückversetzt gefühlt haben, als bei den Beispielen dieses Paragraphen plötzlich Brüche auftauchten anstelle der Dezimalzahlen, mit denen der „echte Praktiker“ seinen Taschenrechner füttert.

Tatsächlich sollte der GAUSS-Algorithmus, so wie er hier vorgestellt wurde, nur für Körper benutzt werden, in denen man *exakt* rechnen kann; beim Rechnen mit reellen Zahlen, vor allem wenn es per Computer oder Taschenrechner geschieht, muß man sich meist mit Näherungslösungen begnügen, und leider können in ungünstigen Fällen selbst kleine Rundungsfehler große Auswirkungen auf das Ergebnis haben.

Der Umgang mit Gleitkommazahlen ist Gegenstand der Numerik (und teilweise auch der Praktischen Informatik); hier sei nur anhand weniger Beispiele gezeigt, daß Probleme auftreten *können:*

Beginnen wir mit dem Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcl} 0{,}001x & + & 0{,}00001y & = & 1 \\ 0{,}00002x & - & 0{,}0005y & = & 1+\varepsilon\,. \end{array}$$

Seine Lösung liegt für $\varepsilon = 0$ bei

$$x \approx 1019{,}6 \quad \text{und} \quad y \approx -1959{,}2\,.$$

Stört man aber die rechte Seite nur im 0,01 in der zweiten Gleichung, ersetzt man dort also die 1 durch 1,01, wird die Lösung zu

$$x \approx 1019{,}8 \quad \text{und} \quad y \approx -1979{,}2\,,$$

und ersetzt man sie gar durch 1,1, erhält man

$$x \approx 1021{,}6 \quad \text{und} \quad y \approx -2159{,}1\,.$$

Schon kleine Störungen der Konstanten, wie sie durch allfällige Rundungsfehler immer wieder auftreten, können also das Ergebnis stark verfälschen. Im vorliegenden Fall läßt sich dieser Effekt leicht quantifizieren: Für allgemeines ε hat das obige Gleichungssystem die Lösung

$$x \approx 1019{,}6 + 20\varepsilon \quad \text{und} \quad y \approx -1959{,}2 + 1999{,}2\varepsilon\,,$$

jede Störung der rechten Seite der zweite Gleichung führt also zu einer fast 2000-fachen Störung des Werts von y.

In diesem einfachen Beispiel kann man relativ schnell sehen, was passiert; außerdem deuten hier schon die im Vergleich zur rechten Seite extrem kleinen Koeffizienten auf der linken Seite darauf hin, daß es Probleme geben dürfte. Leider ist die Situation nicht immer so klar: Beim linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{4}+\frac{x_4}{5}+\frac{x_5}{6}+\frac{x_6}{7} &= 1 \\ \frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_3}{5}+\frac{x_4}{6}+\frac{x_5}{7}+\frac{x_6}{8} &= 1 \\ \frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{5}+\frac{x_3}{6}+\frac{x_4}{7}+\frac{x_5}{8}+\frac{x_6}{9} &= 1 \\ \frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{6}+\frac{x_3}{7}+\frac{x_4}{8}+\frac{x_5}{9}+\frac{x_6}{10} &= 1 \\ \frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{7}+\frac{x_3}{8}+\frac{x_4}{9}+\frac{x_5}{10}+\frac{x_6}{11} &= 1 \\ \frac{x_1}{7}+\frac{x_2}{8}+\frac{x_3}{9}+\frac{x_4}{10}+\frac{x_5}{11}+\frac{x_6}{12} &= 1 \end{aligned}$$

sind die Koeffizienten im Vergleich zur rechten Seite durchaus in vernünftigen Größenordnungen und die Lösung

x_1 = -42, x_2 = 840, x_3 = -5040,
x_4 = 12600, x_5 = -13860, x_6 = 5544

ist auch nicht sonderlich exotisch.

Berechnen wir die Lösung allerdings numerisch mit nur drei geltenden Ziffern, so erhalten wir die numerische Lösung

x_1 = 14,0, x_2 = -24,8 x_3 = -90,3,
x_4 = 133, x_5 = 23,8, x_6 = -40,3,

die mit der korrekten Lösung offensichtlich nicht viel zu tun hat.

Bei diesem wie bei allen folgenden Beispielen von Gleitkommarechnungen wird ein Leser, der die Ergebnisse überprüfen möchte mit hoher Wahrscheinlichkeit andere als die angegebenen Zahlenwerte erhalten. Der Grund liegt darin, daß das Ergebnis einer Rechnung mit Gleitkommazahlen nicht nur von der Anzahl der mitgeführten Dezimalstellen abhängt, sondern auch von der Reihenfolge der Rechenschritte. Das Assoziativgesetz gilt bei Gleitkommazahlen weder für die Addition noch für die Multiplikation: Beispielsweise ist

$$(4{,}21 + 6{,}82) - 2{,}13 = 11{,}0 - 2{,}13 = 8{,}87\,,$$

aber

$$4{,}21 + (6{,}82 - 2{,}13) = 4{,}21 + 4{,}69 = 8{,}90\,,$$

wobei hier so gerechnet wurde, daß jedes Ergebnis *einer* Rechenoperation zunächst exakt bestimmt wurde und dann auf drei geltende Ziffern gerundet wurde. Die meisten heutigen Computer runden bei Gleitkommarechnungen auf diese Weise, auch wenn sie natürlich im allgemeinen nicht wirklich das exakte Zwischenergebnis berechnen. Taschenrechner können auch hier noch zusätzliche Fehler einführen.

Egal wie stark sich die Zahlenwerte, die ein Leser beim Rechnen mit drei geltenden Ziffern bekommt, von den obigen abweichen, werden sie allerdings eines gemeinsam haben: Sie haben nicht einmal entfernt mit den korrekten Zahlen zu tun und liefern somit kein brauchbares Ergebnis.

Eine Erhöhung der Ziffernzahl führt nur langsam zu besseren Ergebnissen: Bei einer Genauigkeit von vier bis fünfzehn Ziffern erhalten wir nacheinander die folgenden „Lösungen“:

Ziffern	x_1	x_2	x_3
4	-21,92	117,3	-169,8
5	49,190	-649,89	2375,7
6	21,4116	-186,033	140,553
7	0,7391135	144,4585	-1515,143
8	-33,875537	707,31488	-4366,0061
9	-41,6819950	834,697420	-5012,66150
10	-42,01132821	840,1699321	-5040,807405
11	-41,998878144	839,98028837	-5039,8947286
12	-41,9992841240	839,988275759	-5039,94032432
13	-41,99988513840	839,9981249645	-5039,990478695
14	-41,999990768304	839,99984919798	-5039,9992338652
15	-41,9999996805266	839,999994672967	-5039,99997253552
korrekt	-42	840	-5040

und

Ziffern	x_4	x_5	x_6
4	328,8	-774,0	549,8
5	-3078,2	982,20	357,22
6	1409,42	-3018,15	1668,17
7	4965,670	-6448,517	2890,176
8	11137,782	-12438,674	5034,5655
9	12540,0255	-13801,1962	5522,77712
10	12601,65989	-13861,54358	5544,533102
11	12599,763146	-13859,763310	5543,9132998
12	12599,8703370	-13859,8738130	5543,95472862
13	12599,97934899	-13859,97993049	5543,992807781
14	12599,998337708	-13859,998384065	5543,9994207771
15	12599,9999397493	-13859,9999409254	5543,99997867941
korrekt	12600	-13860	5544

Wie man sieht, werden die Ergebnisse erst dann halbwegs korrekt, wenn man mit mindestens zehnstelliger Genauigkeit rechnet, d.h, trotz der

kleinen Koeffizienten müßte man im vorliegenden Fall mit doppeltgenauen reellen Zahlen rechnen. (Bei einer Gleitkommaarithmetik nach IEEE Standard 754, wie sie in den meisten heutigen Prozessoren realisiert ist, sind Gleitkommazahlen einfacher Genauigkeit mit einem relativen Fehlerrn von bis zu etwa $5{,}96 \cdot 10^{-8}$ behaftet, was zwischen sieben und acht geltenden Ziffern entspricht; bei doppelter Genauigkeit liegt die Schranke bei etwa $1{,}11 \cdot 10^{-16}$, was nicht ganz sechszehn geltenden Ziffern entspricht.)

Daß selbst die doppelte Genauigkeit nicht immer ausreicht, zeigt die Vergrößerung des obigen Gleichungssystems auf 15 Variable:

$$\frac{x_1}{2}+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{4}+\frac{x_4}{5}+\frac{x_5}{6}+\frac{x_6}{7}+\frac{x_7}{8}+\frac{x_8}{9}+\frac{x_9}{10}+\frac{x_{10}}{11}+\frac{x_{11}}{12}+\frac{x_{12}}{13}+\frac{x_{13}}{14}+\frac{x_{14}}{15}+\frac{x_{15}}{16} = 1$$

$$\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}+\frac{x_3}{5}+\frac{x_4}{6}+\frac{x_5}{7}+\frac{x_6}{8}+\frac{x_7}{9}+\frac{x_8}{10}+\frac{x_9}{11}+\frac{x_{10}}{12}+\frac{x_{11}}{13}+\frac{x_{12}}{14}+\frac{x_{13}}{15}+\frac{x_{14}}{16}+\frac{x_{15}}{17} = 1$$

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{5}+\frac{x_3}{6}+\frac{x_4}{7}+\frac{x_5}{8}+\frac{x_6}{9}+\frac{x_7}{10}+\frac{x_8}{11}+\frac{x_9}{12}+\frac{x_{10}}{13}+\frac{x_{11}}{14}+\frac{x_{12}}{15}+\frac{x_{13}}{16}+\frac{x_{14}}{17}+\frac{x_{15}}{18} = 1$$

$$\frac{x_1}{5}+\frac{x_2}{6}+\frac{x_3}{7}+\frac{x_4}{8}+\frac{x_5}{9}+\frac{x_6}{10}+\frac{x_7}{11}+\frac{x_8}{12}+\frac{x_9}{13}+\frac{x_{10}}{14}+\frac{x_{11}}{15}+\frac{x_{12}}{16}+\frac{x_{13}}{17}+\frac{x_{14}}{18}+\frac{x_{15}}{19} = 1$$

$$\frac{x_1}{6}+\frac{x_2}{7}+\frac{x_3}{8}+\frac{x_4}{9}+\frac{x_5}{10}+\frac{x_6}{11}+\frac{x_7}{12}+\frac{x_8}{13}+\frac{x_9}{14}+\frac{x_{10}}{15}+\frac{x_{11}}{16}+\frac{x_{12}}{17}+\frac{x_{13}}{18}+\frac{x_{14}}{19}+\frac{x_{15}}{20} = 1$$

$$\frac{x_1}{7}+\frac{x_2}{8}+\frac{x_3}{9}+\frac{x_4}{10}+\frac{x_5}{11}+\frac{x_6}{12}+\frac{x_7}{13}+\frac{x_8}{14}+\frac{x_9}{15}+\frac{x_{10}}{16}+\frac{x_{11}}{17}+\frac{x_{12}}{18}+\frac{x_{13}}{19}+\frac{x_{14}}{20}+\frac{x_{15}}{21} = 1$$

$$\frac{x_1}{8}+\frac{x_2}{9}+\frac{x_3}{10}+\frac{x_4}{11}+\frac{x_5}{12}+\frac{x_6}{13}+\frac{x_7}{14}+\frac{x_8}{15}+\frac{x_9}{16}+\frac{x_{10}}{17}+\frac{x_{11}}{18}+\frac{x_{12}}{19}+\frac{x_{13}}{20}+\frac{x_{14}}{21}+\frac{x_{15}}{22} = 1$$

$$\frac{x_1}{9}+\frac{x_2}{10}+\frac{x_3}{11}+\frac{x_4}{12}+\frac{x_5}{13}+\frac{x_6}{14}+\frac{x_7}{15}+\frac{x_8}{16}+\frac{x_9}{17}+\frac{x_{10}}{18}+\frac{x_{11}}{19}+\frac{x_{12}}{20}+\frac{x_{13}}{21}+\frac{x_{14}}{22}+\frac{x_{15}}{23} = 1$$

$$\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{11}+\frac{x_3}{12}+\frac{x_4}{13}+\frac{x_5}{14}+\frac{x_6}{15}+\frac{x_7}{16}+\frac{x_8}{17}+\frac{x_9}{18}+\frac{x_{10}}{19}+\frac{x_{11}}{20}+\frac{x_{12}}{21}+\frac{x_{13}}{22}+\frac{x_{14}}{23}+\frac{x_{15}}{24} = 1$$

$$\frac{x_1}{11}+\frac{x_2}{12}+\frac{x_3}{13}+\frac{x_4}{14}+\frac{x_5}{15}+\frac{x_6}{16}+\frac{x_7}{17}+\frac{x_8}{18}+\frac{x_9}{19}+\frac{x_{10}}{20}+\frac{x_{11}}{21}+\frac{x_{12}}{22}+\frac{x_{13}}{23}+\frac{x_{14}}{24}+\frac{x_{15}}{25} = 1$$

$$\frac{x_1}{12}+\frac{x_2}{13}+\frac{x_3}{14}+\frac{x_4}{15}+\frac{x_5}{16}+\frac{x_6}{17}+\frac{x_7}{18}+\frac{x_8}{19}+\frac{x_9}{20}+\frac{x_{10}}{21}+\frac{x_{11}}{22}+\frac{x_{12}}{23}+\frac{x_{13}}{24}+\frac{x_{14}}{25}+\frac{x_{15}}{26} = 1$$

$$\frac{x_1}{13}+\frac{x_2}{14}+\frac{x_3}{15}+\frac{x_4}{16}+\frac{x_5}{17}+\frac{x_6}{18}+\frac{x_7}{19}+\frac{x_8}{20}+\frac{x_9}{21}+\frac{x_{10}}{22}+\frac{x_{11}}{23}+\frac{x_{12}}{24}+\frac{x_{13}}{25}+\frac{x_{14}}{26}+\frac{x_{15}}{27} = 1$$

$$\frac{x_1}{14}+\frac{x_2}{15}+\frac{x_3}{16}+\frac{x_4}{17}+\frac{x_5}{18}+\frac{x_6}{19}+\frac{x_7}{20}+\frac{x_8}{21}+\frac{x_9}{22}+\frac{x_{10}}{23}+\frac{x_{11}}{24}+\frac{x_{12}}{25}+\frac{x_{13}}{26}+\frac{x_{14}}{27}+\frac{x_{15}}{28} = 1$$

$$\frac{x_1}{15}+\frac{x_2}{16}+\frac{x_3}{17}+\frac{x_4}{18}+\frac{x_5}{19}+\frac{x_6}{20}+\frac{x_7}{21}+\frac{x_8}{22}+\frac{x_9}{23}+\frac{x_{10}}{24}+\frac{x_{11}}{25}+\frac{x_{12}}{26}+\frac{x_{13}}{27}+\frac{x_{14}}{28}+\frac{x_{15}}{29} = 1$$

$$\frac{x_1}{16}+\frac{x_2}{17}+\frac{x_3}{18}+\frac{x_4}{19}+\frac{x_5}{20}+\frac{x_6}{21}+\frac{x_7}{22}+\frac{x_8}{23}+\frac{x_9}{24}+\frac{x_{10}}{25}+\frac{x_{11}}{26}+\frac{x_{12}}{27}+\frac{x_{13}}{28}+\frac{x_{14}}{29}+\frac{x_{15}}{30} = 1$$

Man beachte, daß auch in diesem Gleichungssystem die Köeffizienten der linken Seite und die rechten Seiten sich höchstens um den Faktor 30 unterscheiden, und wenn auch das Gleichungssystem im Vergleich zu

den bisher betrachteten relativ groß aussieht, sind 15 Gleichungen mit 15 Unbekannten im Vergleich zu den bei praktischen Anwendungen auftretenden linearen Gleichungssystemen eher wenig.

Die folgende Tabelle zeigt die korrekten und die mit fünfzehnstelliger Genauigkeit berechneten Werte der Komponenten x_i des Lösungsvektors:

x_1	240	-3173,68185135567
x_2	-28560	228151,786322960
x_3	1113840	-5303344,76558434
x_4	-21162960	58391350,3363271
x_5	232792560	-353947335,741599
x_6	-1629547920	1247733630,21701
x_7	7682154480	-2469397672,05011
x_8	-25241364720	1965727944,18240
x_9	58896517680	2105462770,85717
x_{10}	-98160862800	-6442117291,59057
x_{11}	116008292400	4902607321,68726
x_{12}	-94915875600	1334651674,35581
x_{13}	51108548400	-4588357739,33491
x_{14}	-16287339600	2863533974,79321
x_{15}	2326762800	-619210289,163625 .

Wie man sieht, hat das berechnete Ergebnis nichts mit dem tatsächlichen zu tun.

Beim Lösen von linearen Gleichungssystemen muß man daher unbedingt darauf achten, daß Rundungsfehler auf das absolut notwendige Minimum beschränkt werden, und selbst dann muß man noch sehr vorsichtig sein. In der Numerik werden daher auch Verfahren behandelt werden, die beispielsweise durch Iteration ihre Rundungsfehler selbst konvergieren.

Hier seien nur zwei Faustregeln für den GAUSS-Algorithmus erwähnt:

1.) Die verschiedenen Gleichungen des Systems sollten Koeffizienten in ähnlichen Größenordnungen enthalten. Da sich nichts an der Lösungsmenge ändert, wenn man eine der Gleichungen mit einer von Null verschiedenen Konstanten multipliziert, kann man dies etwa dadurch erreichen, daß man alle Zeilenvektoren der Matrix des Gleichungssystems auf dieselbe Länge (z.B. Eins) normiert.

2.) Falls man ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addiert, sollte der Koeffizient, mit dem die erste Gleichung multipliziert wird, möglichst klein sein, damit die zweite Gleichung nicht zu stark gestört wird. Dies läßt sich etwa dadurch erreichen, daß man bei der Elimination einer Variablen genau die Gleichung unverändert läßt, in der diese Variable mit dem betragsgrößten Koeffizienten vorkommt.

Für alles weitere sei auf die *Numerik* verwiesen.

§4: Die inverse Matrix

Nachdem wir aus §2 wissen, wann und wie sich Matrizen miteinander multiplizieren lassen, liegt es nahe, auch danach zu fragen, wann und wie sie sich durcheinander *dividieren* lassen. Da das Matrizenprodukt nicht kommutativ ist, hat die Frage in dieser Form natürlich nur wenig Sinn. Wir können sie aber sinnvoll machen, indem wir etwa fragen, ob es zu zwei gegebenen Matrizen A, B eine Matrix X gibt, so daß $AX = B$ ist.

Die Techniken, die wir im folgenden kennenlernen werden, gestatten eine Antwort auf diese Frage für beliebige $n \times m$-Matrizen A und $m \times p$-Matrizen B (mit $m \times n$-Matrizen X), aber wir wollen uns hier auf den für die Anwendungen wichtigsten Fall $n = m = p$ und die Einheitsmatrix E als rechte Seite B konzentrieren.

a) Matrixgleichungen und lineare Gleichungssysteme

Wir gehen also aus von einer gegebenen $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{n \times n}$ und einer unbekannten Matrix $X = (x_{ij}) \in k^{n \times n}$; wir versuchen die Matrixgleichung $AX = E$ zu lösen.

Sind

$$\vec{x}^{\,(j)} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}^{\,(j)} = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$$

mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

die Spaltenvektoren von X und E, so ist die Matrixgleichung $AX = E$ äquivalent zu den n linearen Gleichungssystemen

$$A\vec{x}^{(j)} = \vec{e}^{(j)} \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, n\,,$$

die allesamt dieselbe Matrix A haben. Falls diese Gleichungen alle lösbar sind, gibt es also eine Matrix X mit $AX = E$.

Entsprechend lassen sich auch allgemeinere Matrizengleichungen der Form $AX = B$ behandeln und gegebenenfalls lösen.

b) Beispiel einer Matrixinversion

Betrachten wir als Beispiel die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Wir müssen das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösen für die drei rechten Seiten

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dazu wenden wir den GAUSS-Algorithmus simultan auf alle drei Gleichungssysteme an, indem wir die drei rechten Seiten nebeneinander schreiben, d.h. wir gehen aus von einer um alle drei rechten Seiten erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

und wenden darauf die üblichen Eliminationsschritte an:

Als erstes müssen wir in der ersten Spalte alle Koeffizienten bis auf einen zu Null machen; dazu subtrahieren wir das vier- *bzw.* achtfache

der ersten Zeile von der zweiten *bzw.* dritten und erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -12 & -8 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Als nächstes sollte der zweite Eintrag der letzten Spalte eliminiert werden; dazu können wir $7/3$ der mittleren Zeile von der letzten subtrahieren oder aber, um Nenner zu vermeiden, sieben mal die zweite Gleichung von dreimal der dritten subtrahieren; dies führt auf

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{array}\right).$$

In dieser Gestalt lassen sich die drei Gleichungssysteme nun leicht durch Rücksubstitution lösen; wir wollen aber stattdessen lieber weiter mit Zeilenoperationen arbeiten: Subtrahieren wir fünfmal die dritte Zeile von der zweiten und addieren sie dreimal zur ersten, erhalten wir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 13 & -21 & 9 \\ 0 & -3 & 0 & -24 & 36 & -15 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -7 & 3 \end{array}\right).$$

Diese Matrix wird deutlich übersichtlicher, wenn wir die zweite Zeile durch -3 dividieren und die dritte durch -1 und schließlich noch zweimal die neue zweite Zeile von der ersten subtrahieren; sie bekommt dann die Form

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -12 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & -3 \end{array}\right),$$

aus der man die Lösungsvektoren sofort ablesen kann: Da links die Einheitsmatrix steht, sind die Lösungen der Gleichungssysteme gerade die jeweiligen rechten Seiten, d.h. die rechte Matrix

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 8 & -12 & 5 \\ -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung von $AX = E$, wovon man sich zur Vorsicht vielleicht noch einmal durch Nachrechnen überzeugen sollte.

c) Bedingungen für die Invertierbarkeit einer Matrix

Das Verfahren aus dem obigen Beispiel läßt sich natürlich für beliebige Matrizen anwenden; nicht klar ist allerdings, ob und gegebenenfalls wie viele Lösungen es gibt. Dieser Frage wollen wir in diesem Abschnitt nachgehen.

Aus dem vorigen Paragraphen wissen wir, daß ein lineares Gleichungssystem genau dann lösbar ist, wenn der Rang seiner erweiterten Matrix gleich dem seiner Matrix ist. Da weder der Rang einer $n \times n$-Matrix noch der einer $n \times (n+1)$-Matrix größer als n sein können, ist diese Bedingung insbesondere dann erfüllt, wenn der Rang von $A \in k^{n\times n}$ gleich n ist; alsdann ist X nach dem obigen Satz sogar eindeutig bestimmt.

Bevor wir uns überlegen, wie man unter dieser Voraussetzung die Matrix X am besten berechnet, wollen wir uns zunächst davon überzeugen, daß die gerade aufgestellte *hinreichende* Bedingung für die Existenz von X tatsächlich sogar *notwendig* ist. Dazu verwenden wir wieder den schon bei der Matrizenmultiplikation als nützlich erkannten Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen: Die Matrix A entspricht einer linearen Abbildung $\varphi: k^n \to k^n$; falls es dazu eine lineare Abbildung $\psi: k^n \to k^n$ gibt mit

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}: \begin{cases} k^n & \to & k^n \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \end{cases},$$

ist $AX = E$ für die Abbildungsmatrix X von ψ.

Ist aber $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$, so ist ϕ surjektiv, den für jedes $\vec{w} \in k^n$ ist $\psi(\vec{w})$ ein Urbild von $\vec{w}$. Somit hat das lineare Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

für jede rechte Seite mindestens eine Lösung, d.h. unabhängig von der rechten Seite ist der Rang der erweiterten Matrix gleich dem Rang der Matrix A. Dies ist nur dann möglich, wenn der Rang von A gleich n ist, denn hätte A nach Anwendung des GAUSS-Algorithmus Nullzeilen, könnte man dort auf der rechten Seite einen Wert ungleich Null hinschreiben und dann alle Transformationen rückgängig machen: Dies würde auf ein unlösbares Gleichungssystem der Form $A\vec{x} = \vec{c}$ führen.

Satz: *a)* Zu einer $n \times n$-Matrix A gibt es genau dann eine $n \times n$-Matrix X mit $AX = E$, wenn Rang $A = n$ ist.
b) Unter diesen Voraussetzungen ist auch $XA = E$.

Beweis: a) haben wir gerade gezeigt, bleibt also noch *b).*

Aus $AX = E$ folgt, daß $(AX)A = EA = A$ ist; da die Matrizenmultiplikation assoziativ ist, folgt $A(XA) = A$. Außerdem ist natürlich $AE = A$; falls wir zeigen können, daß die Matrizengleichung $AY = A$ nur eine einzige Lösung $Y \in k^{n\times n}$ hat, muß also $XA = E$ sein, wie behauptet.

Die Eindeutigkeit von Y folgt aber aus dem Satz am Ende von §3*c)*, denn wir können $AY = A$ wieder als n lineare Gleichungssysteme für die Spalten von Y betrachten, und jedes dieser Gleichungssysteme hat wegen Rang $A = n$ eine eindeutig bestimmte Lösung. ∎

Definition: Falls es zu $A \in k^{n\times n}$ eine Matrix $X \in k^{n\times n}$ gibt mit $AX = E$, nennen wir A *invertierbar* oder *regulär* und bezeichnen X als die *inverse Matrix* A^{-1}. Eine nicht invertierbare Matrix bezeichnen wir als *singulär.*

Lemma: Sind $A, B \in k^{n\times n}$ invertierbar, so auch ihr Produkt, und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Beweis: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$; also ist AB invertierbar und $B^{-1}A^{-1}$ ist die inverse Matrix. ∎

Man beachte, daß im allgemeinen $A^{-1}B^{-1}$ *nicht* invers zu AB ist: Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad AB = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sind

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

die inversen Matrizen, und Multiplikation zeigt, daß

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}B^{-1}$$

ist. Insbesondere unterscheidet sich auch

$$ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 21 & -8 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$$

deutlich von der Einheitsmatrix.

d) Die LR-Zerlegung einer Matrix

Ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ mit einer invertierbaren Matrix A läßt sich zumindest formal sehr leicht auflösen: Durch Multiplikation mit A^{-1} folgt, daß $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ ist.

Für ein einziges lineares Gleichungssystem ist diese Formel nicht sonderlich interessant, denn der Aufwand zur Berechnung von A^{-1} ist größer als der zur direkten Lösung des Gleichungssystems. Hat man aber viele lineare Gleichungssysteme, die sich nur durch ihre rechte Seiten unterscheiden, wie dies zum Beispiel bei linearen Steuerungsproblemen der Fall ist. so kann man sehr viel Zeit sparen, wenn man zunächst ein für alle Mal die inverse Matrix berechnet und dann die einzelnen Gleichungssysteme für den Preis einer Matrix-Vektor-Multiplikation lösen kann.

Falls A nicht invertierbar ist, falls man also beispielsweise eine Steuerung mit Redundanz hat, kann man nicht so vorgehen. Hier liefert die LR-Zerlegung der Matrix A ein Verfahren zur effizienten Lösung linearer Glleichungssysteme, die sich nur in ihren rechten Seiten unterscheiden.

Die Grundidee der LR-Zerlegung ist dieselbe wie die zur Berechnung der inversen Matrix: Wie wenden den GAUSS-Algorithmus simultan an auf mehrere rechte Seiten.

Um die Struktur der entstehenden Zerlegung besser zu verstehen, betrachten wir den wesentlichen Schritt des GAUSS-Algorithmus, das Addieren von Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen, als Matrizenmultiplikation: Ist

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

eine $n \times n$-Matrix, die an der Stelle (j, i) mit $i < j$ eine Eins hat und sonst lauter Nullen, so ist für eine beliebige $n \times n$-Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ das Produkt

$$E_{ij}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

gleich einer Matrix, die als j-te Zeile die i-te Zeile von A hat und sonst nur aus Nullzeilen besteht. Dies folgt entweder relativ schnell durch Ausmultiplizieren, oder aber – besser – durch Betrachtung der zugehörigen linearen Abbildungen: E_{ij} ist Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die den ν-ten Einheitsvektor von k^n abbildet auf den ν-ten Spaltenvektor von E_{ij}; dies ist für $\nu \neq i$ der Nullvektor, und für $\nu = i$ ist es der j-te Einheitsvektor. Die lineare Abbildung zur Abbildungsmatrix E_{ij} ist also

$$\varphi_{ij}\colon k^n \to k^n; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto x_i \cdot \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} .$$

A ist Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung φ, die den ν-ten Einheitsvektor von k^n abbildet auf den ν-ten Spaltenvektor von A, der wiederung von φ_{ij} auf $a_{i\nu}\vec{e}_j$ abgebildet wird. Die Abbildungsmatrix

von $\varphi_{ij} \circ \varphi$ ist daher jene Matrix, die als j-te Zeile die i-te Zeile von A hat und sonst nur Nullzeilen enthält.

Für die Matrix $L_1 = cE_{ij} + E$, die an der Stelle (j,i) eine Konstante c stehen hat, in der Hauptdiagonalen lauter Einser und sonst nur Nullen, ist dementsprechend

$$L_1 A = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{(j-1)1} & a_{(j-1)2} & \dots & a_{(j-1)m} \\ ca_{i1} + a_{j1} & ca_{i2} + a_{j2} & \dots & ca_{im} + a_{jm} \\ a_{(j+1)1} & a_{(j+1)2} & \dots & a_{(j+1)m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

gerade jene Matrix, die aus A entsteht, wenn man das c-fache der i-ten Zeile zur j-ten Zeile addiert, so wie man es bei der Elimation einer Variablen im GAUSS-Algorithmus macht.

Falls also bei der Anwendung des GAUSS-Algorithmus nie eine Vertauschung zweier Zeilen notwendig ist, verändert er die Matrix des Gleichungssystems, indem er sie sukzessive mit Matrizen obiger Form multipliziert, insgesamt gesehen also mit einem Produkt L solcher Matrizen.

Um etwas über Gestalt dieses Produkts zu erfahren, beachten wir, daß L_1 oberhalb der Diagonalen nur Nullen enthält; L_1 ist daher eine untere Dreiecksmatrix im Sinne der folgenden

Definition: Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in k^{n \times n}$ heißt *untere Dreiecksmatrix,* falls $a_{ij} = 0$ für $i < j$; sie heißt *obere Dreiecksmatrix,* falls $a_{ij} = 0$ wann immer $i > j$.

Eine 2×2-Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist also genau dann eine obere Dreiecksmatrix, wenn $a_{21} = 0$ ist, und genau dann eine untere Dreiecksmatrix, wenn $a_{12} = 0$ ist, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \textit{bzw.} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Lemma: *a)* Das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix.
b) Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere Dreiecksmatrix.

Beweis: a) $A = (a_{i\ell})$ und $B = (b_{\ell j})$ seien untere Dreiecksmatrizen, und $C = (c_{ij})$ sei ihr Produkt, d.h.

$$c_{ij} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell} b_{\ell j} .$$

Für $i > j$ ist für jedes $\ell < i$ der Eintrag $a_{i\ell} = 0$, da A eine untere Dreiecksmatrix ist, und für $\ell \geq i > j$ ist $b_{\ell j} = 0$, da B eine untere Dreiecksmatrix ist. Also ist auch c_{ij} als Summe von lauter Nullen gleich Null.

b) geht genauso. ∎

Damit wissen wir also, daß das Produkt L der Matrizen zu den Zeilenoperationen des GAUSS-Algorithmus eine untere Dreiecksmatrix ist; falls wir ohne Zeilenvertauschungen auskommen, ist die Anwendung des GAUSS-Algorithmus auf ein lineares Gleichungssystem für dessen Matrix also gleichbedeutend mit der Multiplikation mit einer unteren Dreiecksmatrix L.

Da der GAUSS-Algorithmus aus der Matrix eines Gleichungssystems eine obere Dreiecksmatrix R macht, erhalten wir somit eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R derart, daß

$$LA = R$$

ist. Dabei ist die Matrix L invertierbar, da alle ihre Faktoren invertierbar sind: Die Addition des c-fachen der i-ten Zeile zur j-ten Zeile wird rückgängig gemacht durch die Subtraktion des c-fachen der i-ten Zeile von der j-ten Zeile, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & c & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & (-c) & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} .$$

Daher können wir auch schreiben

$$A = L^{-1}R\,.$$

Diese Zerlegung einer Matrix in ein Produkt zweier Dreiecksmatrizen heißt *LR-Zerlegung* der Matrix A. Da man beim GAUSS-Algorithmus im allgemeinen auch Zeilenvertauschungen benötigt, muß sie nicht immer existieren, sie existiert aber, nachdem man in A gegebenenfalls die Zeilen permutiert hat, und das ist für praktische Anwendungen gut genug.

Falls man die LR-Zerlegung einer Matrix kennt, folgt beispielsweise, daß A genau dann invertierbar ist, wenn R invertierbar ist; alsdann ist

$$A^{-1} = R^{-1}L\,.$$

Auch wenn man mehrere Gleichungssysteme

$$A\vec{x} = \vec{b}_i$$

mit verschiedenen rechten Seiten $\vec{b}^{(i)}$ lösen muß, ist die Kenntnis der LR-Zerlegung nützlich: Durch Multiplikation mit L werden die Gleichungssysteme zu

$$LA\vec{x} = R\vec{x} = L\vec{b}^{(i)}\,,$$

und diese Gleichungssysteme lassen sich problemlos lösen, da sie Treppengestalt haben, so daß man einfach sukzessive Einsetzen kann.

All dies funktioniert natürlich nur, wenn wir den GAUSS-Algorithmus anwenden können ohne daß wir Zeilen miteinander vertauschen müssen. Zeilenvertauschungen entsprechen Multiplikationen mit sogenannten *Permutationsmatrizen:* Wie wir oben gesehen haben, macht die Multiplikation mit E_{ji} die i-te Zeile einer Matrix zur j-ten Zeile und setzt alle anderen Zeilen auf Null. Multiplikation einer Matrix A mit $E_{ji}+E_{ij}$ erzeugt daher eine Matrix, die als i-te Zeile die j-te Zeile von A hat und als j-te Zeile die i-te Zeile von A; alle anderen Zeilen sind Null. Um nun noch die restlichen Zeilen in ihrer ursprünglichen Form zu bekommen, dürfen wir nicht die gesamte Einheitsmatrix addieren, denn sonst hätten wir ja als i-te und j-te Zeile der Produktmatrix jeweils die Summe der i-ten und der j-ten Zeile von A. Stattdessen müssen wir

eine Diagonalmatrix D_{ij} addieren, die an der i-ten und j-ten Position der Hauptdiagonalen Nullen hat, ansonsten Einser. Wir erhalten also insgesamt die Matrix $P_{ij} = D_{ij} + E_{ij} + E_{ji}$ der Form

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix},$$

die sich nur in der i-ten und der j-ten Zeile von einer Diagonalmatrix unterscheidet.

Diese Matrix ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\pi_{ij}\colon k^n \to k^n;\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

die die i-te und die j-te Koordinate eines Vektors vertauscht; ein Produkt solcher Matrizen ist dementsprechend die Abbildungsmatrix einer linearen Abbildung, die in irgendeiner anderen Weise die Koordinaten permutiert; man bezeichnet eine solche Matrix daher als *Permutationsmatrix.* Offensichtlich enthält sie in jeder Zeile und in jeder Spalte genau eine Eins, ansonsten lauter Nullen. Eine Permutationsmatrix ist stets in-

vertierbar, da man jede Permutation auch wieder rückgängig machen kann.

Da man im GAUSS-Algorithmus stets durch Zeilenvertauschungen und Eliminationsschritte zur Endgestalt kommen kann, gibt es daher zu jeder beliebigen Matrix $A \in k^{n\times n}$ eine Permutationsmatrix P, eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so daß

$$LPA = R$$

ist. Da P und L invertierbar sind, kann man dies auch als

$$A = P^{-1}L^{-1}R$$

schreiben, d.h. jede Matrix läßt sich schreiben als Produkt einer Permutationsmatrix, einer unteren Dreiecksmartrix und einer oberen Dreiecksmatrix. Wichtiger ist allerdings die obige Darstellung $LPA = R$, denn sie gestattet es, ein beliebiges Gleichungssystem

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

in das einfacher zu lösende Gleichungssystem

$$R\vec{x} = LP\vec{b}$$

überzuführen; nach Berechnung der beiden Matrizen R und LP lassen sich also solche Gleichungssysteme mit wechselnden rechten Seiten effizient lösen.

Nachdem die LR-Zerlegung somit durchaus recht nützlich ist, stellt sich noch die Frage, wie man sie am besten berechnet. Das oben skizzierte Verfahren zur Herleitung der LR-Zerlegung ist natürlich *im Prinzip* auch rechnerisch durchführbar, allerdings ist der Gedanke an eine Matrixmultiplikation für *jede einzelne* Zeilenoperation nicht gerade attraktiv.

Eine bessere Methode liefert, wie so oft in der linearen Algebra, der GAUSS-Algorithmus: Die Endform eines linearen Gleichungssystems nach Durchführung aller Eliminationsschritte macht aus der ursprünglichen Matrix A des Gleichungssystems die Matrix $LA = R$; zumindest diese berechnet der GAUSS-Algorithmus also direkt.

L erhalten wir, wenn wir uns überlegen, welche Funktion diese Matrix hat: Sie gibt an, welche Zeilenoperationen ausgeführt werden. Ist also $\vec{b}$ eine rechte Seite, so ist $L\vec{b}$ die rechte Seite des Gleichungssystem nach Durchführung der Eliminationsschritte. Wenn wir entsprechend neben die Matrix A noch eine Matrix B schreiben und mit dieser alle Zeilenoperationen genauso ausführen wie mit A, so steht nachher rechts die Matrix LB. Speziell für $B = E$ ist dies L selbst, d.h. das algorithmische Verfahren zur Bestimmung der LR-Zerlegung ist gerade die erste Hälfte des Verfahrens zur Bestimmung der inversen Matrix: Wir schreiben die Matrizen A und E nebeneinander und führen die Eliminationsschritte des GAUSS-Algorithmus durch; danach haben wir die Matrizen $LA = R$ und $LE = L$.

Betrachten wir dazu ein konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Hier müssen wir vor der Anwendung des GAUSS-Algorithmus offensichtlich Zeilen vertauschen, z.B. die erste und die zweite. Dies entspricht einer Multiplikation mit

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und führt auf

$$A' = PA = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} .$$

Wir schreiben die Einheitsmatrix daneben:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) .$$

Die Sechs links unten wird eliminiert durch Subtraktion der zweifachen ersten Zeile von der letzten:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$