Gleichungssystem versteht man ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \,, \end{aligned}$$

wobei die a_{ij} und die b_i bekannte Elemente des Grundkörpers k sind, während die x_i für unbekannte Elemente von k stehen, die so bestimmt werden sollen, daß alle m Gleichungen zu wahren Aussagen werden. Ein m-Tupel $(x_1, \ldots, x_m) \in k^m$ mit dieser Eigenschaft bezeichnen wir als eine *Lösung* des linearen Gleichungssystems; die Menge $\mathcal{L} \subseteq k^m$ aller Lösungen heißt *Lösungsmenge.*

Falls alle $b_i = 0$ sind, sprechen wir von einem *homogenen* Gleichungssystem, ansonsten von einem *inhomogenen.* Für ein homogenes lineares Gleichungssystem ist $(0, \ldots, 0)$ offenbar immer eine Lösung; ein inhomogenes lineares Gleichungssystem kann dagegen auch unlösbar sein, d.h. $\mathcal{L} = \emptyset$, etwa im Beispiel

$$x_1 + x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 + x_2 = 1 \,.$$

Die Lösung $(0, \ldots, 0)$ eines homogenen linearen Gleichungssystems bezeichnet man als die *triviale Lösung;* interessant sind meist nur die nichttrivialen Lösungen – falls es welche gibt. Ein Beispiel, in dem es keine gibt, wäre etwa

$$x_1 + 2x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_1 + 3x_2 = 0 \,.$$

a) Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Aus der Schule sind vielleicht spezielle Verfahren bekannt, wie man für $n, m \le 3$ die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems bestimmen kann. Hier wollen wir ein Verfahren betrachten, das für beliebige n, m zum Ziel führt und die Lösung auch, falls das Gleichungssystem nicht gerade eine spezielle Gestalt hat, im allgemeinen auf die effizienteste Weise liefert, den GAUSS-*Algorithmus.*

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855) war unter allen deutschen Mathematikern der wohl universellste: Er leistete wesentliche Beiträge zur Zahlentheorie, zur nichteuklidischen Geometrie, zur Differentialgeometrie und Kartographie, zur Fehlerrechnung und Statistik, zur Astronomie und Geophysik *usw.* Er wendete seine Methoden auch praktisch an; beispielsweise leitete er die erste Vermessung und Kartierung des Königreichs Hannover und zeitweise auch den Witwenfond der Universität Göttingen. Seine hierbei gewonnene Erfahrung benutzte er für erfolgreiche Spekulationen mit Aktien. Sätze und Verfahren von Gauß werden uns im Laufe der Vorlesung noch häufig begegnen.

Die Grundidee seines Verfahrens zur Lösung linearer Gleichungssysteme ist sehr einfach: Im Falle einer einzigen Gleichung mit einer einzigen Unbekannten x können wir das „Gleichungssystem“

$$ax = b$$

sofort lösen: Für $a \neq 0$ ist $x = -b/a$, d.h. $\mathcal{L} = \{-b/a\}$; ansonsten gibt es für $b \neq 0$ keine Lösung, d.h. $\mathcal{L} = \emptyset$, und für $a = b = 0$ ist jedes x aus k eine Lösung, d.h. $\mathcal{L} = k$.

Das GAUSSsche Eliminationsverfahren führt ein allgemeines lineares Gleichungssystem sukzessive zurück auf solche lineare Gleichungen in einer Unbekannten, ausgehend von zwei trivialen Beobachtungen:

1. Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ändert sich nicht, falls wir zwei Gleichungen miteinander vertauschen.
2. Die Lösungsmenge ändert sich auch dann nicht, wenn wir ein Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen addieren, d.h. wenn wir die Gleichung

   $$\ell_j(x_1, \ldots, x_m) \underset{\text{def}}{=} a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jm}x_m = b_j$$

   ersetzen durch

   $$\ell_j(x_1, \ldots, x_m) + \lambda\ell_i(x_1, \ldots, x_m) = b_j + \lambda b_i \,, \qquad (*)$$

   denn unter der Nebenbedingung

   $$\ell_i(x_1, \ldots, x_m) = b_i$$

   ist $(*)$ äquivalent zu $\ell_j(x_1, \ldots, x_m) = 0$.

Mit Hilfe dieser beiden Beobachtungen läßt sich nun die Variablenanzahl wie folgt sukzessive reduzieren: Beginnen wir mit der Elimination von x_1. Falls x_1 im Gleichungssystem überhaupt nicht vorkommt, falls also alle $a_{i1} = 0$ sind, gibt es nichts zu tun: Wir haben ein Gleichungssystem in $x_2, \dots, x_m$, und für jede Lösung $(x_2, \dots, x_m)$ dieses Systems sowie jedes beliebige $x_1 \in k$ ist $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine Lösung des ursprünglichen Systems.

Ansonsten können wir, indem wir nötigenfalls zwei Gleichungen miteinander vertauschen, annehmen, daß $a_{11} \neq 0$ ist. Dann lassen wir die erste Gleichung so stehen, wie sie ist, und ersetzen jede weitere Gleichung $\ell_j(x_1, \dots x_m) = b_j$ durch

$$\ell_j(x_1, \dots x_m) - \frac{a_{j1}}{a_{11}} \ell_1(x_1, \dots x_m) = b_j - \frac{a_{j1}}{a_{11}} b_1 ;$$

in diesen Gleichungen kommt x_1 offenbar nicht mehr vor. Wir haben somit ein Gleichungssystem in einer Variablen weniger, plus der Gleichung

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 .$$

Sobald wir das Gleichungssytem für $x_2, \dots, x_m$ gelöst haben, wird diese Gleichung nach Einsetzen einer Lösung $(x_2, \dots, x_m)$ zu einer linearen Gleichung für x_1, die wir lösen können:

$$x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m)}{a_{11}} .$$

Das Gleichungssystem für $x_2, \dots, x_m$ wird nun, falls $m > 2$ ist, nach genau derselben Methode weiterreduziert: Falls x_2 in keiner der Gleichungen vorkommt, haben wir tatsächlich ein Gleichungssystem in $x_3, \dots, x_m$, andernfalls können wir durch Vertauschen zweier Gleichungen annehmen, daß x_2 in der ersten Gleichung mit einem von Null verschiedenen Vorfaktor auftritt, und wir können wie oben x_2 aus allen weiteren Gleichungen eliminieren *usw.*

Da in jedem Eliminationsschritt ein Nenner auftritt, können die Nenner vor allem bei großem m gelegentlich schnell unübersichtlich groß werden. Obwohl es *im Prinzip* nicht notwendig ist, kann man um dies zu vermeiden noch als dritte Operation die Multiplikation einer Gleichung

mit einem Körperelement (z.B. einem Hauptnenner der Koeffizienten) zulassen. Dies ist gleichbedeutend damit, daß man anstelle der Operation $(*)$ allgemeiner die Ersetzung von $\ell_j(x_1, \dots x_m)$ durch

$$\mu\ell_j(x_1, \dots x_m) + \lambda\ell_i(x_1, \dots x_m)$$

mit beliebigem $\mu \neq 0$ aus k zuläßt. ($\mu = 0$ muß hier natürlich unbedingt ausgeschlossen werden, denn sonst läßt sich die Gleichung $\ell_j(x_1, \dots, x_m) = 0$ aus dem neuen Gleichungssystem nicht mehr herleiten, d.h. wir erhalten auch „Lösungen“, die diese Gleichung nicht erfüllen.)

b) Erste Beispiele

Betrachten wir dazu einige Beispiele; der Grundkörper k sei dabei jeweils der Körper der reellen Zahlen oder einer seiner Teilkörper, etwa $k = \mathbb{Q}$.

Sei zunächst

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_2 & = & 19 \end{array}$$

das zu lösende Gleichungssystem. Da x_1 in der ersten Gleichung tatsächlich vorkommt, müssen wir nichts vertauschen; allerdings müssen wir ein Drittel der ersten Gleichung von der zweiten und fünf Drittel der ersten Gleichung von der dritten subtrahieren, um x_2 aus diesen beiden Gleichungen zu eliminieren, was auf das etwas unangenehme Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & \frac{4}{3}x_2 & + & \frac{11}{3}x_3 & = & \frac{4}{3} \\ & & -\frac{19}{3}x_2 & + & \frac{16}{3}x_3 & = & \frac{32}{3} \end{array}$$

führt. Solche Gleichungssysteme sind zwar nicht immer vermeidbar, aber hier hätten wir es auch einfacher haben können: Wenn wir im ursprünglichen Gleichungssystem die ersten beiden Gleichungen vertauschen, wird es zu

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_2 & = & 19 , \end{array}$$

und hier müssen wir stattdessen das Dreifache *bzw.* Fünffache der ersten Gleichung von der zweiten *bzw.* dritten subtrahieren, was auf das deutlich angenehmere Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & -4x_2 & - & 11x_3 & = & -4 \\ & & -13x_2 & - & 13x_3 & = & 4 \end{array}$$

führt. Etwas ähnliches hätten wir auch bekommen, wenn wir die letzten beiden Gleichungen des anderen Systems einfach mit drei multipliziert hätten, aber grundsätzlich ist es meistens günstiger, die Gleichung mit dem einfachsten führenden Koeffizienten an erster Stelle zu haben. Auch hier wird das Gleichungssystem zumindest optisch etwas angenehmer, wenn wir die zweite und die dritte Gleichung mit (-1) multiplizieren:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ & & 4x_2 & & 11x_3 & = & 4 \\ & & 13x_2 & + & 13x_3 & = & -4 \end{array}$$

Uns interessieren zunächst nur die letzten beiden Zeilen. Diese bilden ein lineares Gleichungssystem in x_2 und x_3, aus dem wir x_2 in einer der beiden Gleichungen eliminieren möchten.

Da x_2 in der zweiten Gleichung wirklich vorkommt, subtrahieren wir $13/4$ mal diese Gleichung von der dritten und erhalten als neues System

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ & & 4x_2 & + & 11x_3 & = & 4 \\ & & & & -\frac{91}{4}x_3 & = & -17\,. \end{array}$$

Hier ist die letzte Gleichung eine gewöhnliche lineare Gleichung für x_3, aus der wir sofort ablesen, daß

$$x_3 = \frac{68}{91}$$

ist. Dies setzen wir in die vorletzte Gleichung ein:

$$4x_2 + \frac{748}{91} = 4$$

ist eine lineare Gleichung für x_2 mit Lösung

$$x_2 = -\frac{96}{91}\,.$$

Dies sowie x_3 setzen wir schließlich in die erste Gleichung ein:

$$x_1 + \frac{80}{91} = 3$$

hat die Lösung

$$x_1 = \frac{193}{91}\,,$$

so daß ingesamt

$$\left(\frac{193}{91}, -\frac{96}{91}, \frac{68}{91}\right)$$

die (einzige) Lösung des Gleichungssystems ist.

Als nächstes Beispiel betrachten wir

$$\begin{array}{rrrcrcrcrcrcr} & & 5x_3 & & & & & - & 2x_6 & & & = & 3 \\ & 4x_2 & & + & 2x_4 & & & - & 3x_6 & - & 7x_7 & = & -2 \\ x_1 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0 \end{array}$$

Hier kommt x_1 in der ersten Gleichung nicht vor, wohl aber in der dritten. Wir vertauschen daher die erste Gleichung mit der dritten und erhalten

$$\begin{array}{rrrcrcrcrcrcr} x_1 & & & - & 3x_4 & + & x_5 & & & & & = & 0 \\ & 4x_2 & & + & 2x_4 & & & - & 3x_6 & - & 7x_7 & = & -2 \\ & & 5x_3 & & & & & - & 2x_6 & & & = & 3\,. \end{array}$$

In diesem Gleichungssystem kommt x_1 nur in der ersten Gleichung vor, x_2 nicht mehr hinter der zweiten und x_3 (natürlich) nicht mehr hinter der dritten, wir haben also bereits die Treppengestalt erreicht.

Die dritte Gleichung $5x_3 - 2x_6 = 3$ hat offensichtlich keine eindeutig bestimmte Lösung: Wir können entweder nach x_3 oder nach x_6 auflösen, so daß eine der beiden Unbekannten beliebig bewählt werden kann. Wählen wir etwa für x_6 irgendein Element $\alpha \in k$, so wird

$$x_6 = \alpha, \quad x_3 = \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}\,.$$

Die zweite Gleichung wird nach Einsetzen von $x_6 = \alpha$ zu

$$4x_2 + 2x_4 - 3\alpha - 7x_7 = -2\,,$$

also zu einer Beziehung zwischen x_2, x_4 und x_7, denn α ist ein bereits fest gewähltes und somit bekanntes Element des Grundkörpers k. Wieder können wir eine der beiden Variablen willkürlich festlegen, etwa x_7 auf ein $\beta \in k$ setzen und x_4 auf ein $\gamma \in k$; wir erhalten

$$x_7 = \beta, \quad x_4 = \gamma, \quad x_2 = \frac{3}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}\,.$$

In der ersten Gleichung schließlich müssen wir alle bereits berechneten oder festgelegten Unbekannten einsetzen und erhalten dann die Gleichung

$$x_1 - 3\gamma + x_5 = 0\,.$$

Hier können wir noch $x_5 = \delta$ beliebig festlegen und erhalten dann für die letzte noch verbleibende Variable

$$x_1 = 3\gamma - \delta\,.$$

Insgesamt hängt die Lösung dieses Gleichungssystems also ab von vier willkürlich wählbaren Körperelementen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in k$ oder, wie wir auch sagen werden, von vier *Parametern.* Die *Lösungsmenge* $\mathcal{L}$ ist daher die Menge

$$\left\{ \left(3\gamma - \delta, \frac{3}{4}\alpha + \frac{7}{4}\beta - \frac{\gamma}{2} - \frac{1}{2}, \frac{2}{5}\alpha + \frac{3}{5}, \gamma, \delta, \alpha, \beta \right) \;\middle|\; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in k \right\}\,.$$

Im ersten Beispiel brauchten wir von den beiden Operationen des GAUSS-Algorithmus nur den Eliminationsschritt, im zweiten nur den Vertauschungsschritt. Als nächstes betrachten wir ein Beispiel, in dem beide notwendig sind, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & - & 6x_6 & = & -8
\end{array}$$

Hier kommt x_1 ausgerechnet in der ersten Gleichung nicht vor, dafür aber in allen folgenden; wir müssen also die erste Gleichung mit einer der anderen vertauschen, etwa der zweiten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15 \\
4x_1 & - & 7x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \\
2x_1 & - & 7x_2 & + & x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & - & 6x_6 & = & -8
\end{array}$$

Nun kommt x_1 in der zweiten Gleichung nicht mehr vor; aus der dritten, vierten *bzw.* fünften Gleichung kann x_1 eliminiert werden, indem man dreimal, zweimal *bzw.* einmal die erste Gleichung subtrahiert:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & -9x_2 & + & x_3 & + & 17x_4 & + & 18x_5 & - & 9x_6 & = & -21 \\
 & & -3x_2 & & & + & 5x_4 & + & 12x_5 & - & 3x_6 & = & -24 \\
 & & -12x_2 & + & x_3 & + & 22x_4 & + & 30x_5 & - & 12x_6 & = & -44
\end{array}$$

Als nächstes muß x_2 aus der dritten bis fünften Gleichung eliminiert werden; da x_2 in der zweiten Gleichung mit Koeffizient eins vorkommt, müssen wir einfach jenes Vielfache der zweiten Gleichung subtrahieren, das dem jeweiligen x_2-Koeffizienten entspricht. Da hier alle diese Koeffizienten negativ sind, bedeutet dies, daß wir dasjenige Vielfache der zweiten Gleichung *addieren,* das dem Betrag des Koeffizienten entspricht:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & x_3 & + & 82x_4 & + & 6x_5 & & & = & 76\,.
\end{array}$$

Hier muß x_3 aus der letzten Gleichung eliminiert werden; dazu muß offenbar einfach die dritte Gleichung subtrahiert werden:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 7\,.
\end{array}$$

Eigentlich sollte man hier schon sehen, was los ist, aber wir rechnen zur Veranschaulichung des GAUSS-Algorithmus trotzdem stur weiter nach Schema F: Danach muß x_4 aus der letzten Gleichung eliminiert werden durch Subtraktion der vorletzten:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12 \\
 & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10 \\
 & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69 \\
 & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6 \\
 & & & & & & & & & & 0 & = & 1\,.
\end{array}$$

Damit wird endgültig klar, daß jede Lösung $(x_1, \dots, x_6)$ des gegebenen Gleichungssystems insbesondere auch die Gleichung $0 = 1$ erfüllen muß, d.h. die Lösungsmenge ist leer.

Nachdem wir soviel Arbeit in dieses Beispiel investiert haben, sollten wir zumindest einen Teil der Rechnungen recyclen zu einem Beispiel, in dem es Lösungen gibt. Dazu muß nur die letzte der fünf ursprünglichen Gleichungen auf der rechten Seite leicht abgeändert werden: Wir betrachten nun das System

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\ 2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\ 6x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & - & 3x_6 & = & 15\\ 4x_1 & + & x_2 & & & - & 3x_4 & & & + & x_6 & = & 0\\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & x_3 & + & 10x_4 & + & 12x_5 & - & x_6 & = & \mathbf{-9}\,. \end{array}$$

Hierauf lassen sich genau dieselben Umformungen anwenden wie oben, anstelle des Systems mit fünfter Gleichung $0 = 1$ führen diese nun aber auf

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & & & - & 4x_4 & - & 6x_5 & + & 2x_6 & = & 12\\ & & x_2 & & & + & 5x_4 & - & 2x_5 & + & x_6 & = & 10\\ & & & & x_3 & + & 62x_4 & & & & & = & 69\\ & & & & & & 20x_4 & + & 6x_5 & & & = & 6\\ & & & & & & & & & & 0 & = & 0\,. \end{array}$$

Diese letzte Gleichung ist natürlich für jedes Tupel $(x_1, \dots, x_6)$ erfüllt. Die vorletzte gibt eine Beziehung zwischen x_4 und x_5, wir können also

$$x_5 = \alpha \in k$$

beliebig wählen und erhalten dann

$$x_4 = -\frac{3}{10}\alpha + \frac{3}{10}\,.$$

Wenn wir dies in die dritte Gleichung einsetzen, bleibt dort nur noch x_3 als Variable stehen, und aus

$$x_3 - \frac{93}{5}\alpha + \frac{93}{5} = 69$$

lesen wir sofort ab, daß

$$x_3 = \frac{93}{5}\alpha + \frac{252}{5}$$

ist. Damit gehen wir in die zweite Gleichung:

$$x_2 - \frac{7}{5}\alpha + x_6 + \frac{3}{2} = 10\,.$$

Hier können wir wieder eine der beiden noch verbliebenen Variablen auf einen beliebigen Wert setzen, etwa

$$x_6 = \beta \in k\,.$$

Dann wird

$$x_2 = \frac{7}{2}\alpha - \beta + \frac{17}{2}\,,$$

was wir schließlich zusammen mit all den anderen bereits berechneten x_i in die erste Gleichung einsetzen können:

$$2x_1 + \frac{11}{5}\alpha + \frac{79}{5} = 12$$

hat die Lösung

$$x_1 = -\frac{11}{10}\alpha - \frac{19}{10}\,.$$

Damit hängt also die allgemeine Lösung dieses linearen Gleichungssystems von zwei frei wählbaren Parametern α und β ab. Sie wird geringfügig übersichtlicher, wenn wir α als $\alpha = 10\gamma$ schreiben; dann ist $\mathcal{L}$ gleich der Menge

$$\left\{\left(-11\gamma - \tfrac{19}{10}, 35\gamma - \beta + \tfrac{17}{2}, 186\gamma + \tfrac{252}{5}, -3\gamma + \tfrac{3}{10}, 10\gamma, \beta\right) \,\middle|\, \beta, \gamma \in k\right\}.$$

Als nächstes Beispiel wollen wir ein System betrachten, daß von zwar festen, aber nicht numerisch gegebenen Parametern abhängt: Wir betrachten das Gleichstromnetzwerk aus Abbildung acht mit bekannten Widerständen $R_1, \dots, R_5$ und bekanntem Eingangs- und Ausgangsstrom I; gesucht sind die Ströme $I_1, \dots, I_5$.

Nach den KIRCHHOFFschen Gesetzen müssen sich zunächst an allen Knoten die eingehenden und die ausgehenden Ströme zu Null ergänzen, d.h. wir erhalten die Gleichungen

$$I_1 + I_2 = I = I_4 + I_5$$

für Anfang und Ende sowie

$$I_2 = I_3 + I_4 \quad \text{und} \quad I_1 + I_3 = I_5$$

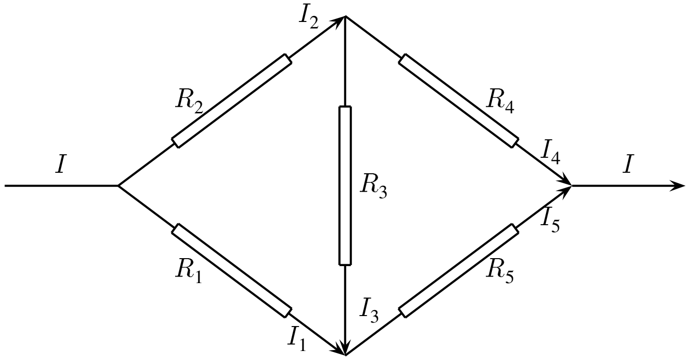

Abb. 8: Ein Gleichstromnetzwerk

für oben und unten. Außerdem müssen sich die Spannungen in den beiden Dreiecken zu Null summieren; nach dem OHMschen Gesetz führt dies auf die beiden Gleichungen

$$R_2I_2 + R_3I_3 - R_1I_1 = 0 \quad \text{und} \quad R_3I_3 + R_5I_5 - R_4I_4 = 0\,.$$

Ordnen wir dies nach den Strömen I_ν, erhalten wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
I_1 & & & + & I_3 & & & - & I_5 & = & 0 \\
-R_1I_1 & + & R_2I_2 & + & R_3I_3 & & & & & = & 0 \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0\,.
\end{array}$$

Die Elimination von I_1 aus allen Gleichungen ab der zweiten ist einfach: Wir müssen die erste Gleichung von der vierten subtrahieren und ihr R_1-faches zur fünften addieren; das neue System ist

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & -I_2 & + & I_3 & & & - & I_5 & = & -I \\
 & & (R_1+R_2)I_2 & + & R_3I_3 & & & & & = & R_1I \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0\,,
\end{array}$$

Da I_2 in der zweiten Gleichung nicht vorkommt, vertauschen wir diese mit der dritten; danach können wir letztere zur vierten addieren und ihr $(R_1 + R_2)$-faches von der fünften subtrahieren, um I_2 aus allen weiteren Gleichungen zu eliminieren.

Damit weiterhin jede Gleichung in eine Zeile paßt, setzen wir zur Abkürzung

$$R_{12} \underset{\text{def}}{=} R_1 + R_2 \quad \text{und} \quad R_{123} \underset{\text{def}}{=} R_1 + R_2 + R_3$$

und erhalten

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I \\
 & & & & & & -I_4 & + & -I_5 & = & -I \\
 & & & & R_{123}I_3 & + & R_{12}I_4 & & & = & R_1I \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0\,.
\end{array}$$

Zur Elimination von I_3 bietet sich an, die dritte Gleichung, in der I_3 nicht vorkommt, mit der sechsten zu vertauschen (diese hat einen einfacheren I_3-Koeffizienten als die fünfte), und dann das R_{123}/R_3-fache dieser Gleichung zur fünften zu addieren. Dazu müssen wir uns allerdings zunächst überlegen, ob das überhaupt zulässig ist: Falls $R_3 = 0$ ist, dürfen wir natürlich nicht durch R_3 dividieren; wenn dieser Fall nicht ausgeschlossen werden kann, muß er also ab hier getrennt behandelt werden.

Im vorliegenden Beispiel wollen wir aber davon ausgehen, daß alle fünf Widerstände tatsächlich vorhanden sind, so daß alle R_i positive reelle Zahlen sind. Dann können wir durch R_3 dividieren und das System wird zu

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\
 & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\
 & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0 \\
 & & & & & & -I_4 & + & -I_5 & = & -I \\
 & & & & & & \alpha I_4 & + & \beta I_5 & = & R_1I \\
 & & & & & & I_4 & + & I_5 & = & I
\end{array}$$

mit

$$\alpha = R_{12} + \frac{R_4R_{123}}{R_3} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{-R_5R_{123}}{R_3}\,.$$

Schließlich muß noch I_4 aus den letzten beiden Gleichungen eliminiert werden; wir addieren also die vierte Gleichung unverändert zur letzten und ihr α-faches zur vorletzten:

$$\begin{array}{ccccccccccc} I_1 & + & I_2 & & & & & & & = & I \\ & & I_2 & - & I_3 & - & I_4 & & & = & 0 \\ & & & & -R_3I_3 & + & R_4I_4 & - & R_5I_5 & = & 0 \\ & & & & & & -I_4 & + & -I_5 & = & -I \\ & & & & & & & & (\beta-\alpha)I_5 & = & (R_1-\alpha)I \\ & & & & & & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

Damit können wir nacheinander

$$I_5 = \frac{R_1-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot I\,, \qquad I_4 = I - I_5\,, \qquad I_3 = \frac{R_4I_4 - R_5I_5}{R_3}\,,$$

$$I_2 = I_3 + I_4 \qquad \text{und} \qquad I_1 = I - I_2$$

bestimmen, wobei sich der Leser noch überlegen sollte, warum die Division durch $\beta-\alpha$ unproblematisch ist.

Zum Berechnen der Ströme in konkreten Beispielen reicht diese Lösungsformel aus; ist man allerdings an einem symbolischen Ausdruck interessiert, muß man die Definitionen von $\alpha, \beta, R_{12}, R_{123}$ einsetzen und nacheinander alle rechte Seiten auf Ausdrücke nur in I und den R_i reduzieren. Dies ist eine *im Prinzip* einfache Übungsaufgabe in Bruchrechnung, die man allerdings im vorliegenden Fall besser einem Computeralgebrasystem überläßt. Als Ergebnis erhält man die expliziten Formeln

$$I_1 = \frac{(R_2R_5+R_2R_3+R_2R_4+R_3R_4)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$

$$I_2 = \frac{(R_1R_4+R_1R_5+R_3R_5+R_1R_3)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$

$$I_3 = \frac{(R_1R_4-R_2R_5)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$

$$I_4 = \frac{(R_1R_3+R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}$$

$$I_5 = \frac{(R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4)\cdot I}{R_1R_5+R_2R_5+R_3R_5+R_1R_3+R_2R_3+R_1R_4+R_2R_4+R_3R_4}\,,$$

die für die meisten *konkreten* Anwendungen erheblich weniger nützlich sind als die obige Form des Ergebnisses.

Als letztes Beispiel schließlich betrachten wir ein Beispiel, das von einem Parameter abhängt, in dem man aber *nicht* wie im obigen Beispiel einfach durch Ausdrücke im Parameter dividieren darf. (Eigentlich hätten wir es da auch nicht immer dürfen, aber wir haben einfach angenommen, daß alle Widerstände wirklich vorhanden und damit positiv sind; da Kurzschlüsse immer wieder vorkommen, ist diese Annahme nicht unbedingt realistisch.) Das Gleichungssystem hänge ab von einem Paramter $a \in k$ und habe die Form

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ -2x_1 & - & 2ax_2 & - & ax_3 & = & 1\,. \end{array}$$

Ein Computeralgebrasystem findet unschwer die Lösung

$$x_1 = \frac{a^2-3a-1}{a^2-3a+2}, \qquad x_2 = \frac{3}{a^2-3a+2}, \qquad x_3 = \frac{-3}{a-2}\,.$$

Diese „Lösung“ hat aber für $a = 2$ und auch für $a = 1$ Nullen im Nenner, ist dort also nicht erklärt. Für ein Computeralgebrasystem ist das kein Problem: Wie der Name sagt, rechnet es *algebraisch,* und da ist a keine reelle Zahl, sondern ein Symbol, das nichts mit irgendwelchen Zahlen zu tun hat. Damit ist $a-2$ ein formaler Ausdruck, der nie null sein kann, denn das *Symbol* a ist schließlich verschieden von der *Zahl* zwei.

Dieses Rechnen in sogenannten Funktionenkörpern ist mathematisch problemlos, ist aber nicht das, was in den meisten Anwendungen gefragt ist: Dort steht a im allgemeinen für eine variable Größe, in Abhängigkeit von der das Gleichungssystem gelöst werden soll. Man kann sich beispielsweise vorstellen, daß das Gleichungssystem ein lineares Regelungsproblem beschreibt in Abhängigkeit von steuerbaren Größen x_1, x_2 und x_3, wobei die zu steuernden Größen zu

$$x_1 + ax_2 + x_3, \quad x_1 + x2 \quad \text{und} \quad -2x_1 - 2ax_2 - ax_3$$

werden. Der Paramter a wäre dann zu interpretieren als eine von außen vorgegebene Umgebungsbedingung (z.B. die Temperatur), und das lineare Gleichungssystem besagt, daß wir das System so regeln wollen, daß die drei steuerbaren Größen allesamt eins werden – unabhängig von der Außentemperatur.

Bei einer solchen Interpretation können wir natürlich *nicht* einfach durch $a-2$ dividieren; ein Ergebnis, wie $x_3 = -3/(a-2)$ besagt in so einem Fall, daß das Ziel im Falle $a = 2$ nicht erreichbar ist, und das ist ein sehr wichtiges Ergebnis. Bei einem System, das einen Stromkreis beschreibt, könnte das zum Beisiel bedeuten, daß beim Parameterwert $a = 2$ ein Kurzschluß entsteht, so daß dieser Parameterwert unbedingt verhindert werden muß. Deshalb muß man bei einem Gleichungssystem, das ein reales Problem beschreibt, vor jeden Division durch einen parameterabhängigen Ausdruck garantieren, daß dieser Ausdruck von null verschieden ist, und man muß die Fälle, in denen er null wird, gesondert diskutieren.

Im vorliegenden Beispiel (einer Vordiplomsaufgabe vom April 1999) führt dies auf folgende Lösung:

Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten sowie Addition der zweifachen ersten Gleichung zur dritten ergibt

$$\begin{aligned}(a-1)x_2 + x_3 &= 0\\ (2-a)x_3 &= 3\,.\end{aligned}$$

Für $a = 2$ ist die letzte dieser beiden Gleichungen unlösbar, ansonsten ist

$$x_3 = \frac{3}{2-a} \quad \text{falls} \quad a \neq 2\,.$$

Für $a = 1$ wird die vorletzte Gleichung zu $x_3 = 0$, was der schon gefundenen Lösung

$$x_3 = \frac{3}{2-a} = 1$$

widerspricht; auch dann ist also das Gleichungssystem unlösbar. In allen anderen Fällen erhalten wir

$$x_2 = \frac{3}{(a-1)(a-2)} \quad \text{falls} \quad a \neq 1, 2\,.$$

Schließlich läßt sich noch, beispielsweise aus der zweiten Gleichung des ursprünglichen Systems, x_1 berechnen und wir erhalten als Ergebnis: Die

Lösungsmenge ist

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(1 - \frac{3}{(a-1)(a-2)}, \frac{3}{(a-1)(a-2)}, \frac{3}{a-2} \right) \right\}\,, \text{ falls } a \neq 1, 2$$

und

$$\mathcal{L} = \emptyset\,, \text{ falls } a = 1 \text{ oder } a = 2$$

ist.

c) Lösbarkeitskriterien für lineare Gleichungssysteme

Nach diesen Beispielen ist es an der Zeit, wieder zu den theoretischen Grundlagen zurückzukehren. Sei also wieder

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\\ \vdots \qquad\qquad &= \vdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,, \end{aligned}$$

ein allgemeines lineares Gleichungssystem. Wenn wir die a_{ij} zu einer Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

zusammenfassen und die Unbekannten und rechten Seiten zu Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m \end{pmatrix}\,,$$

läßt sich das Gleichungssystem auch kurz als $A\vec{x} = \vec{b}$ schreiben. Wir bezeichen A als die *Matrix des Gleichungssystems* und

$$\left(A \mid \vec{b} \right) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_m \end{pmatrix}$$