da Zufallsvariablen, so wie wir sie bislang betrachtet haben, eigenständige Prozesse sind, haben sie *a priori* nichts miteinander zu tun. Das ist natürlich nicht das, was wir für die Beschreibung von Bild- und Audiodaten brauchen; hier müssen wir davon ausgehen, daß ein einziger Prozeß gleichzeitig einen ganzen Vektor *bzw.* eine ganze Matrix von Zufallswerten erzeugt, wobei deren einzelne Komponenten dann sehr wohl voneinander abhängig sind.

Für zwei solche Komponenten $X$ und $Y$ mit Wertebereichen $\{x_0, \dots, x_m\}$ und $\{y_0, \dots, y_n\}$ sowie Wahrscheinlichkeiten $p_i$ und $q_j$ ist die Wahrscheinlich dafür, daß $X$ den Wert $x_i$ liefert und $Y$ den Wert $y_j$ dann nicht $p_i q_j$, wie das bei unabhängigen Variablen der Fall wäre, sondern irgendeine Wahrscheinlichkeit $\pi_{ij}$, von der wir nur wissen, daß aus offensichtlichen Gründen etwa

$$\sum_{j=0}^{m} \pi_{ij} = p_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{m} \pi_{ij} = q_j$$

sein muß. Für so ein Paar definieren wir nun

**Definition:** *a)* Die Kovarianz eines Paars $(X, Y)$ voneinander abhängiger Zufallsvariablen ist

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= E\big((X - E(X))(Y - E(Y))\big) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \pi_{ij} \big((x_i - E(X)\big)\big((y_j - E(Y)\big) . \end{aligned}$$

*b)* Die Korrelation von $(X, Y)$ ist

$$\rho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} .$$

Wie vielleicht aus der Schule bekannt ist, heißen zwei Ereignisse *unabhängig* voneinander, wenn die Wahrscheinlichkeit für ihr gemeinsames Eintreten gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von je einem dieser Ereignisse ist. Beispielsweise sollte beim Werfen zweier Würfel jede Kombination von Augenzahlen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ haben, d.h. die beiden Augenzahlen sind unabhängig voneinander; gibt man allerdings den beiden Würfeln je einen Magnetkern, so wird sich das Bild deutlich ändern, da nun gewisse Kombinationen deutlich wahrscheinlicher und andere deutlich unwahrscheinlicher werden.



Entsprechend nennen wir die beiden Zufallsvariablen $X$ und $Y$ voneinander unabhängig, falls für alle $i, j$ gilt: $\pi_{ij} = p_i q_j$. Alsdann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X,Y) &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} \pi_{ij} \big(x_i - E(X)\big)\big((y_j - E(Y)\big) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} \Big[p_i(x_i - E(X))\Big)\Big] \Big[q_j\big(y_j - E(Y)\big)\Big] \\ &= \left(\sum_{i=0}^{m} p_i\big(x_i - E(X)\big)\right) \left(\sum_{j=0}^{n} q_j\big((y_j - E(Y))\big)\right) = 0 , \end{aligned}$$

denn

$$\sum_{i=0}^{m} p_i\big((x_i - E(X)\big) = \sum_{i=0}^{m} p_i x_i - \sum_{i=0}^{m} p_i E(X) = \sum_{i=0}^{m} p_i x_i - E(X)$$

verschwindet nach Definition des Erwartungswerts.

Damit haben zwei voneinander unabhängige Zufallsvariablen also Kovarianz und Korrelation null; man sagt auch, sie seien unkorreliert. Bei Bilddaten wird das wohl im allgemeinen nicht der Fall sein; hier wird man davon ausgehen, daß die Zufallsvariablen zu benachbarten Pixeln sehr stark miteinander zusammenhängen. Wir können beispielsweise annehmen, daß

$$Y = \rho X + Z$$

ist mit einer von $X$ unabhängigen Zufallsvariablen $Z$ und einer positiven reellen Zahl $\rho < 1$. Dann ist

$$E(Y) = E(\rho X + Z) = \rho E(X) + E(Z) ;$$

falls wir annehmen, daß $X$ und $Y$ denselben Erwartungswert haben, ist daher

$$E(Z) = (1 - \rho)E(X) ,$$

was für ein $\rho$ nahe eins deutlich kleiner ist als $E(Z)$.

In dieser Situation ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Y) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big((y_j - E(Y)\big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big(\rho x_i + z_j - \rho E(X) - E(Z)\big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big[\rho\big(x_i - E(X)\big)+\big(z_j - E(Z)\big)\big]\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\pi_{ij}\rho\big(x_i - E(X)\big)^2\\
&\qquad + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\pi_{ij}\big(x_i - E(X)\big)\big(z_j - E(Z)\big)\\
&= \rho\sum_{i=0}^{m}p_i\big(x_i - E(X)\big)^2 + \operatorname{cov}(X,Z) = \rho\sigma_X^2\,,
\end{aligned}$$

da $X$ und $Z$ voneinander unabhängige Zufallsvariablen sind.

Wenn wir jetzt noch annehmen, daß $\sigma_X = \sigma_Y$ ist, folgt

$$\rho(X,Y) = \frac{\rho\sigma_X^2}{\sigma_X\sigma_Y} = \rho\,,$$

wir können auf diese Weise also für beliebiges $\rho \in [0, 1]$ ein Paar voneinander anhängiger Zufallsvariablen mir Korrelation $\rho$ erzeugen.

Besser noch: Wann immer zwei Zufallsvariablen mit gleicher Standardabweichung Korrelation $\rho$ haben, sind wir immer im obigen Fall, denn definieren wir eine neue Zufallsvariable $Z$ durch

$$Z = Y - \rho X\,,$$



so ist $E(Z) = E(Y) - \rho E(X)$, und das Paar $(X, Z)$ ist unkorreliert, denn

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X,Z) &= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)\big(z_j - E(Z)\big)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)\Big[\big(y_j - E(Y)\big) - \rho\big(x_i - E(X)\big)\Big]\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)\big(y_j - E(Y)\big)\\
&\qquad - \rho\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\big(x_i - E(X)\big)^2\\
&= \operatorname{cov}(X,Y) - \rho\sigma_X^2 = \rho\sigma_X\sigma_Y - \rho\sigma_X^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Unser Modell für Audio- und Bilddaten ist nun folgendes: Die Daten werden gegeben durch einen Vektor *bzw.* eine Matrix voneinander abhängiger Zufallsvariablen mit gemeinsamem Erwartungswert $\mu$ und Standardabweichung $\sigma$; zwei benachbarte Zufallsvariablen sollen jeweils Korrelation $\rho$ haben. Diese Zahl $\rho$ bezeichnen wir als die *Autokorrelation* des jeweiligen Signals. Wir schätzen sie anhand eines gegebenen Bilds oder Musikstücks als Korrelation zwischen benachbarten Daten.

Da der Begriff der Autokorrelation das wohl am schwersten verständliche der hier eingeführten statistischen Konzepte ist, sind die sechs Testbilder in Richtung fallender Autokorrelation geordnet: Die höchste Autokorrelation hat mit $\rho = 0{,}98$ das Bild „Peppers“, wo die recht homogenen Flächen der Paprikaschoten dafür sorgen, daß sich ein Pixel nur selten von seinen Nachbarn unterscheidet; auch „Lenna“ und „Sailboat“ werden von flächigen Strukturen dominiert. Bei „Stream“ kommen in stärkerem Maße feine Verästelungen von Bäumen und Büschen ins Spiel, so daß die Autokorrelation auf 0,94 absinkt, und bei „Tiffany“ und „Baboon“ schließlich sorgen die vielen Haare für feine Details, die die Autokorrelation auf 0,87 *bzw.* 0,86 herunterdrücken.

Um zu sehen, wie sich die Autokorrelation zur Komprimierung der Daten ausnutzen läßt, betrachten wir der Einfachheit halber zunächst nur eine Folge $X_1, \ldots, X_n$ von Zufallsvariablen; der gemeinsame Erwartungswert sei $\mu$, die gemeinsame Standardabweichung $\sigma$, und die Korrelation zwischen $X_i$ und $X_{i+1}$ sei jeweils $\rho$.

Nach dem oben Gesagten gibt es dann für jede der Zufallsvariablen $X_i$ mit $i < n$ eine davon unabhängige Zufallsvariable $Z_i$, so daß

$$X_{i+1} = \rho X_i + Z_i$$

ist; entsprechend ist für $i < n - 1$

$$X_{i+2} = \rho X_{i+1} + Z_{i+1} = \rho^2 X_i + \rho Z_i + Z_{i+1}$$

*usw.;* wenn wir zusätzlich annehmen, daß alle $Z_i$ voneinander unabhängig sind, ist also $\rho(X_i, X_{i+2}) = \rho^2$ und allgemein

$$\rho(X_i, X_j) = \rho^{|i-j|} .$$

In der Signalverarbeitung spricht man bei einer solchen Folge von Zufallsvariablen von einem *autoregressive Prozeß;* der hier betrachtete allereinfachste Fall, bei dem alle Korrelationen nur von der Korrelation zwischen zwei benachbarten Zufallsvariablen abhängen, wird als AR(1)-Modell bezeichnet; in der Sprechweise der Wahrscheinlichkeitstheorie handelt es sich hier um spezielle sogenannte MARKOV-Ketten.

Der russische Mathematiker ANDREĬ ANDREEVICH MARKOV (1856–1922) studierte in Sankt Petersburg, wo er später auch Professor wurde. Er beschäftigte sich zunächst hauptsächlich mit Zahlentheorie und Analysis; erst später kommen die wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeiten, für die er heute vor allem bekannt ist. MARKOV-Ketten sind Prozesse ohne Erinnerung, in denen das zukünftige Verhalten nur vom augenblicklichen Zustand abhängt, nicht aber von der Geschichte des Systems. Damit sind sie gerade hier bei Bilddaten nur eine unvollkommene Approximation an die Realität, aber dennoch sehr nützlich.

Falls wir bei einer solchen Folge von Zufallsvariablen die Werte von $X_1, \ldots, X_n$ nacheinander übertragen, übertragen wir zuerst den Wert von $X_1$, dann mit $X_2$ noch einmal zu $100 \times \rho$ % denselben Wert, mit $X_3$ dasselbe noch einmal zu $100 \times \rho^2$ %, *usw.*



Eine offensichtliche Alternative hierzu wäre, nur den Wert von $X_1$ zu übertragen und ansonsten nur die Werte der $Z_i$. Eine ähnliche Vorgehensweise wird tatsächlich gelegentlich angewandt, allerdings macht man es sich dann noch einfacher und überträgt nur die *Differenzen,* also

$$X_1, X_2 - X_1, \ldots, X_n - X_{n-1} .$$

Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß sowohl diese Differenzen als auch die $Z_i$ von Zeit zu Zeit sehr groß werden *müssen,* da es in fast jedem Bild oder Musikstück gelegentliche aprupte Veränderungen gibt.

Die Idee hinter allen Komprimierungsverfahren, die auf Transformationen beruhen, ist es, anstelle der Zufallsvariablen $X_i$ geeignete Linearkombinationen

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j$$

zu betrachten, wobei $(\alpha_{ij})$ eine *invertierbare* $n \times n$-Matrix ist, so daß sich auch umgekehrt die $X_i$ wieder aus den $Y_j$ rekonstruieren lassen. Diese Matrix wird so gewählt, daß die neuen Variablen möglichst unkorreliert sind und daß man die Größe der neuen Variablen möglichst gut abschätzen kann.

Letzterer Aspekt erfordert statistische Betrachtungen, auf die wir hier verzichten wollen; die Dekorrelation der Zufallsvariablen aber führt uns geradewegs zu Eigenvektoren symmetrischer Matrizen:

Wir definieren für eine Folge von Zufallsvariablen deren *Korrelationsmatrix*

$$\mathrm{Kor}(X_1, \ldots, X_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

dadurch, daß der Eintrag an der Stelle $ij$ dieser Matrizen jeweils die Korrelation $\rho(X_i, X_j)$ sein soll.

Das Ideal, auf das wir hinarbeiten, sind Zufallsvariablen, deren Korrelationsmatrix eine Diagonalmatrix ist, denn dann sind je zwei verschiedene Variablen unkorreliert.

Da die Korrelationsmatrix eine symmetrische Matrix ist, gibt es eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ aus reellen Eigenvektoren, bezüglich derer sie Diagonalgestalt hat; die Vektoren dieser Orthonormalbasis seien

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \vec{b}_n = \begin{pmatrix} \alpha_{n1} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix} .$$

Wir definieren die neuen Zufallsvariablen durch

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} X_j ;$$

dann ist

$$\begin{aligned} \rho(Y_i, Y_k) = \vec{v}_{Y_i} \cdot \vec{v}_{Y_k} &= \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \vec{v}_{X_j} \right) \cdot \left( \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{k\ell} \vec{v}_{X_\ell} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ij}\ \vec{v}_{X_j} \cdot \vec{v}_{X_\ell}\ \alpha_{k\ell} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{ij}\ \rho(X_j, X_\ell)\ \alpha_{k\ell} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\ \rho(X_j, X_\ell) \right)\ \alpha_{k\ell} . \end{aligned}$$

Der Inhalt der großen Klammer ist offensichtlich der Eintrag an der Stelle $i\ell$ der Produktmatrix $A \cdot \mathrm{Kor}(X_1, \dots, X_n)$, wobei $A = (\alpha_{ij})$ die Matrix der Koeffizienten $\alpha_{ij}$ ist, und die Summation über $\ell$ macht daraus den Eintrag an der Stelle $ik$ des Produkts mit ${}^tA$. Insgesamt haben wir also gezeigt, daß

$$\mathrm{Kor}(Y_1, \dots, Y_n) = A \cdot \mathrm{Kor}(X_1, \dots, X_n) \cdot {}^tA$$

ist. Nun müssen wir nur noch beachten, daß die Spaltenvektoren der Matrix $A$ als die Vektoren einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ gewählt waren; der Eintrag an der Stelle $ij$ der Matrix $A\,{}^tA$ ist also das Standardskalarprodukt des $i$-ten und des $j$-ten Vektors aus einer Orthonormalbasis und somit null für $i \neq j$ und eins für $i = j$. Daher ist $A \cdot {}^tA = E$, also ${}^tA^{-1}$ und somit auch

$$\mathrm{Kor}(Y_1, \dots, Y_n) = A \cdot \mathrm{Kor}(X_1, \dots, X_n) \cdot A^{-1} .$$

Damit ist $\mathrm{Kor}(Y_1, \dots, Y_n)$ eine Diagonalmatrix, denn für jede Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist $ABA^{-1}$ die Matrix $B$ bezüglich der Basis aus den



Spaltenvektoren vom $A$. Diese Basis besteht hier aber aus lauter Eigenvektoren der Korrelationsmatrix, die transformierte Matrix ist also eine Diagonalmatrix.

Unter den Annahmen unseres statistischen Modells können wir also jede Folge von Zufallsvariablen durch eine lineare Transformation in eine Folge unkorrelierter Zufallsvariablen überführen. Diese Transformation bezeichnet man, obwohl sie zuerst von HOTELLING vorgeschlagen wurde, als KARHUNEN-LOÈVE-Transformation.

HAROLD HOTELLING (1895–1973) war ein amerikanischer Statistiker und Ökonom; er lehrte an der Columbia University und der University of North Carolina. In einer 1933 veröffentlichten Arbeit im *Journal of Educational Psychology* schlug er erstmalig diese Transformation vor, die von Statistikern heute in Anlehnung an den Titel seiner Arbeit meist als *Hauptkomponentenanalyse* bezeichnet wird. In Europa erschien die Transformation fast gleichzeitig um 1947 *bzw.* 1948 in wahrscheinlichkeitstheoretischen Arbeiten des Finnen KARI KARHUNEN (*1915) und des Franzosen MICHEL LOÈVE (1907–1979), nach denen sie in der technischen Literatur benannt wird.

Die Matrix $A$ der linearen Transformation hängt nur von $\rho$ ab und kann daher für gängige Werte von $\rho$ vorberechnet werden; die KARHUNEN-LOÈVE-Transformation ist also einfach die Multiplikation mit einer bekannten Matrix.

Für die Multiplikation zweier $n \times n$-Matrizen benötigt man allerdings $n^3$ Multiplikationen und noch einmal $n^2(n-1)$ Additionen; der Aufwand steigt mit großem $n$ also sehr stark an. In der Praxis gibt man sich daher mit einen Kompromiß zufrieden und zerlegt eine Folge von Zufallszahlen in kurze Teilsequenzen, die bei eindimensionalen Folgen typischerweise die Länge 8 haben; dies ist beispielsweise der Standard bei Musik-CDs.

Allerdings wird weder bei Musik-CDs noch sonst irgendwo die KARHUNEN-LOÈVE-Transformation wirklich angewandt. Der Grund liegt an der Struktur der Eigenvektoren der Korrelationsmatrix: Betrachten wir etwa als typisches Beispiel den $n = 8$; dann haben wir die

Matrix

$$\mathrm{Cov}(X_1,\dots,X_8)=\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6 & \rho^7\\ \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5 & \rho^6\\ \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 & \rho^5\\ \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4\\ \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3\\ \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho & \rho^2\\ \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 & \rho\\ \rho^7 & \rho^6 & \rho^5 & \rho^4 & \rho^3 & \rho^2 & \rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Ihre Eigenwerte für $\rho = 0{,}95$ können zumindest näherungsweise berechnet werden, und auch die Eigenvektoren lassen sich bestimmen. Diese sollen hier jedoch nicht numerisch angegeben werden: Eine Folge von acht reellen Zahlen ist schließlich im allgemeinen eher unanschaulich. Stattdessen sind in den Abbildungen 18 bis 25 die Eigenvektoren *graphisch* dargestellt, wobei einem Vektor

$$(a_1,\dots,a_8)\in\mathbb{R}^8$$

die acht Striche vom Punkt $(i,0)$ bis $(i,a_i)$ in der Ebenen entsprechen sollen. Zusätzlich ist in jedes dieser Diagramme noch eine der Kurven

$$y=\cos\left(\frac{(2x-1)(j-1)\pi}{16}\right)$$

für $j = 1,\dots,8$ eingezeichnet; wie man sieht, lassen sich die Komponenten der Eigenvektoren sehr gut durch diese Cosinuswerte annähern. Dies gilt nicht nur für den speziellen Wert $\rho = 0{,}95$, sondern für jeden Wert von $\rho$, der hinreichend nahe bei eins liegt.

Aus diesem Grund arbeitet man in der Praxis lieber mit den Cosinuswerten; der Basiswechsel hin zur Basis aus den Cosinusvektoren bezeichnet man als *diskrete Cosinustransformation*. Ihr Hauptvorteil gegenüber der KARHUNEN-LOÈVE-Transformation ist, daß sie durch einen schnellen Algorithmus berechnet werden kann, der anstelle des Aufwands $n^3$ für eine Matrixmultiplikation nur den Aufwand $n^2 \log n$ hat. Für Einzelheiten sei auf die Vorlesung *Numerik I* im nächsten Semester verwiesen.

Die diskrete Cosinustransformation ist Teil fast aller gängiger Normen zur Bildkomprimierung: Sowohl der JPEG-Standard für Photographien,



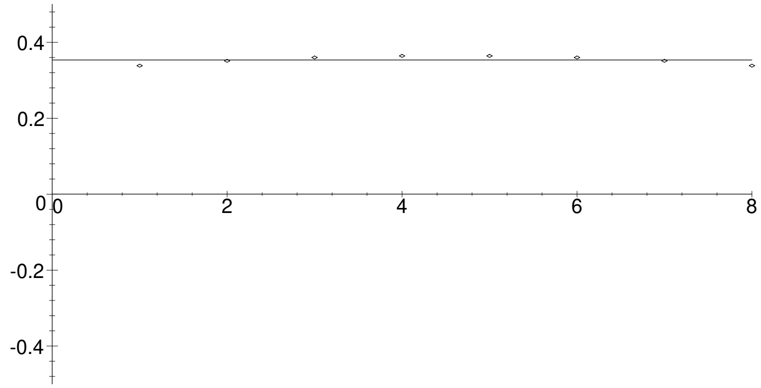



Abb. 18: Der erste Eigenvektor der Korrelationsmatrix

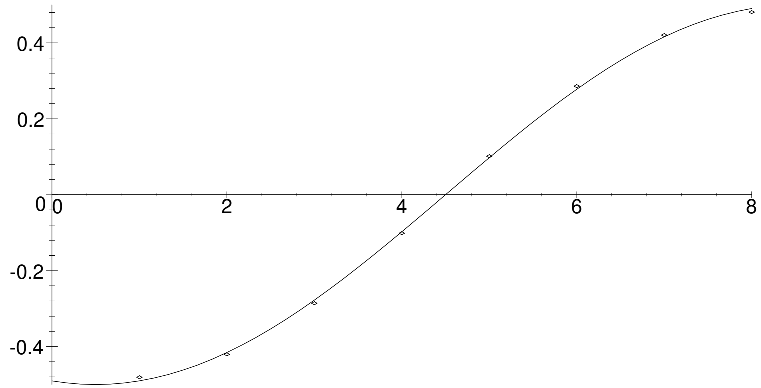



Abb. 19: Der zweite Eigenvektor der Korrelationsmatrix

die Standards MPEG 1 und 2 für digitale (Unterhaltungs-)Videos als auch der Standard CCITT H.261 für Videokonferenzen enthalten (neben anderen Bestandteilen) jeweils eine diskrete Cosinustransformation. Auch bei Audio-CDs ist sie ein Teil der Codierung.

Die Transformation allein ist natürlich noch keine Komprimierung: Schließlich haben wir nur einen Vektor in einer anderen Basis hin-

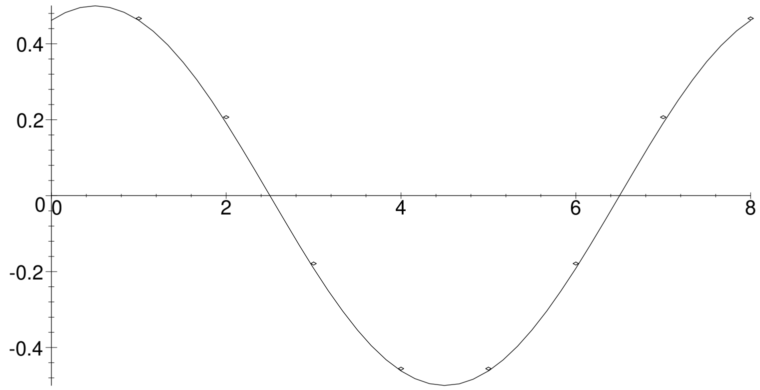



Abb. 20: Der dritte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

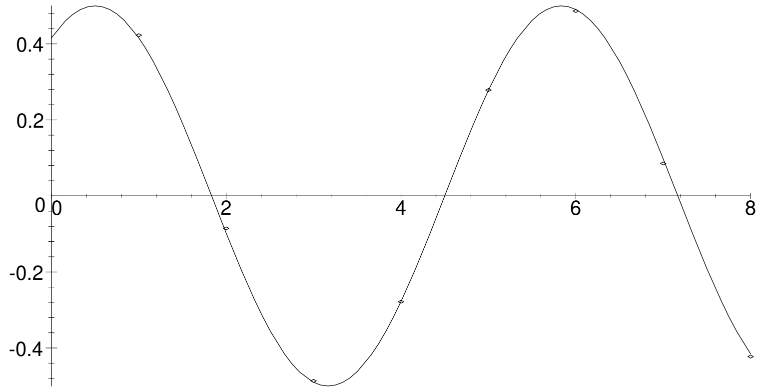



Abb. 21: Der vierte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

geschrieben, und die Anzahl der reellen Zahlen, die man zur Beschreibung eines solchen Vektors benötigt, ist unabhängig von der Basis. Der wesentliche Vorteil der neuen Basis ist, daß man statistisch recht gute Aussagen über die Größe der Komponenten machen können. Hier wollen wir auf exakte statistische Berechnungen verzichten und stattdessen informell diskutieren, warum dies der Fall sein könnte.



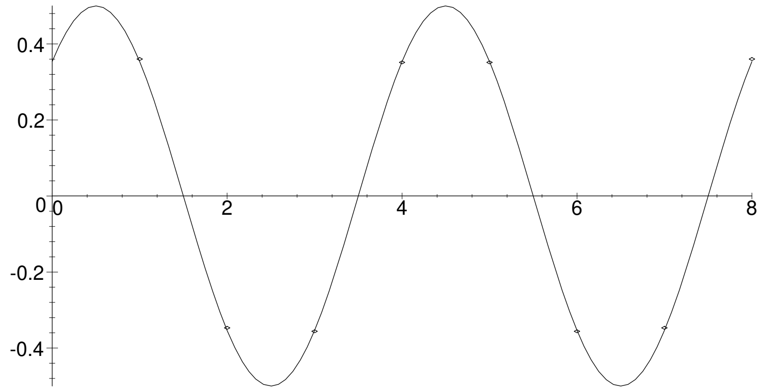



Abb. 22: Der fünfte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

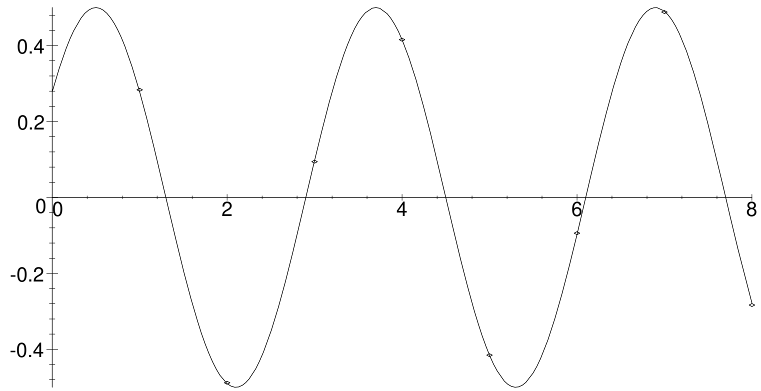



Abb. 23: Der sechste Eigenvektor der Korrelationsmatrix

Wie die Abbildungen der Basisvektoren zur KARHUNEN-LOÈVE-Transformationen und die Formeln für die Basisvektoren zur diskreten Cosinustransformation zeigen, werden die Basisvektoren, wenn man sie in der hier angegebenen Reihenfolge betrachtet, immer hochfrequenter. In einem hinreichend fein abgetasteten Bild oder Audiosignal erwarten wir, daß hochfrequente Schwankungen keine große Rolle spielen und

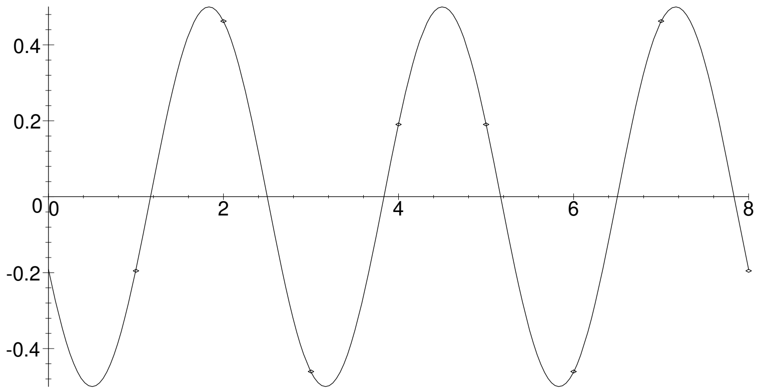



Abb. 24: Der siebte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

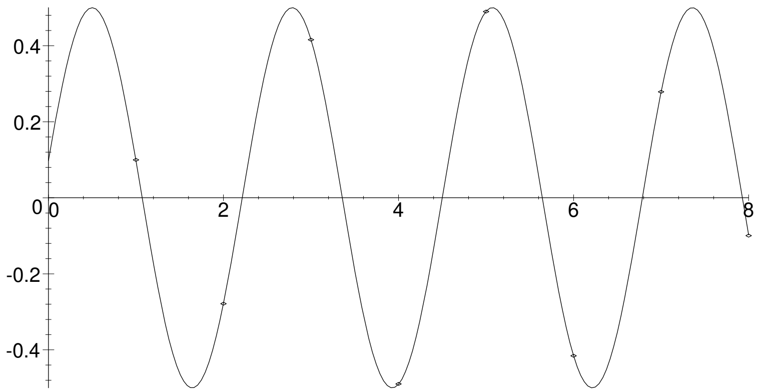



Abb. 25: Der achte Eigenvektor der Korrelationsmatrix

somit die entsprechenden Basisvektoren nur kleine Koeffizienten haben oder in vielen Fällen sogar gleich gar nicht auftreten. Dementsprechend genügt es, für die Übertragung dieser Koeffizienten nur wenige Bits bereitzustellen; bei nur geringen Abstrichen an die Qualität kann man auf gewisse Koeffizienten sogar ganz verzichten.

Ein Kompressionsverfahren wird daher, je nach Anspruch an die Qua-



lität, entweder alle Koeffizienten des Signals in der neuen Basis übertragen und durch eine geeignete Darstellung der Daten dafür sorgen, daß Folgen von Nullen nur wenig Platz benötigen, oder aber es wird nur eine Auswahl der Koeffizienten übertragen und auch für diese jeweils festlegen, wie viele Bit dafür in Anspruch genommen werden. Diese Anzahl wird umso geringer sein, je höher die Frequenz des jeweiligen Basisvektors ist; bei einigen Verfahren wie etwa JPEG können die Anzahlen auch variablel in Abhängigkeit von einer Qualitätszahl gewählt werden.

Zum Schluß sei noch ganz kurz erwähnt, daß die KARHUNEN-LOÈVE-Transformation und damit (mit ganz geringen Abstrichen) auch die diskrete Cosinustransformation zwar die Korrelationsmatrix in optimaler Weise diagonalisieren, daß aber daraus nicht folgt, daß sie auch optimale Kompressionsverfahren liefern: Ausßer der Kovarianz gibt es noch weitere Quellen für Redundanz eines Bildes.

Ein gewisser Nachteil der Cosinustransformation ist außerdem, daß man für aprupte Übergänge, wie sie etwa bei Kanten immer wieder einmal auftauchen, die hochfrequenten Basisvektoren braucht, die dann aber nicht nur die Kante selbst beeinflussen, sondern das gesamte Quadrat, auf das die Transformation angewandt wird.

Eine bessere Möglichkeit wäre es daher, wenn man anstelle von Cosinusfunktionen Funktionen verwenden könnte, die sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich lokalisiert sind. Solche Funktionen gibt es in der Tat, etwa die sogenannten *Wavelets.* Hierbei handelt es sich um schnell abklingende Wellen, und neuere Arbeiten deuten darauf hin, daß diese für gewisse Bildmodelle (die im Gegensatz zum hier betrachteten nicht mit Wahrscheinlichkeiten arbeiten) nicht zu weit vom Optimum entfernt sein sollten. Im Rahmen dieser Vorlesung ist es jedoch zeitlich weder möglich, auf diese Modelle einzugehen, noch ist an eine genauere Behandlung von Wavelets zu denken.

Einen allgemein verständlichen Überblick über Wavelets findet man etwa bei

BARBARA BURKE HUBBARD: Wavelets: Die Mathematik der kleinen Wellen, *Birkhäuser* 1997;

das zitierte Optimalitätsresultat ist beschrieben im Vortrag

STÉPHANE MALLAT: Applied Mathematics meets signal processing

auf dem Internationalen Mathematikerkongress 1998 in Berlin, nachzulesen in Band I der Proceedings, S. 319–338, oder unter http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/documenta/xvol-icm/00/Mallat.MAN.html.

Eine für Technische Informatiker gut geeignete fundierte Einführung in diesen Themenkreis ist etwa

STÉPHANE MALLAT: A wavelet tour of signal processing, *Academic Press, 1998.*

## §9: Normierte Vektorräume und erste Anwendungen

### a) Definitionen und erste Beispiele

In einem EUKLIDischen oder auch HERMITEschen Vektorraum $V$ können wir Abstände definieren, die sich so ähnlich verhalten, wie der Abstand $|x-y|$ zwischen zwei reellen Zahlen, und damit können wir auch Begriffe wie Stetigkeit und Konvergenz definieren. Da wir dazu kein Skalarprodukt benötigen, wollen wir nun Vektorräume betrachten, in denen es nur so etwas wie eine Länge gibt, nicht aber notwendigerweise auch Winkel. Wir betrachten dazu nur reelle und komplexe Vektorräume; den jeweiligen Grundkörper bezeichnen wir mit $\mathbb{K}$.

**Definition:** Eine Norm auf dem $\mathbb{K}$-Vektorraum $V$ mit $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ist eine Abbildung $\|\ \|: V \to \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:
*a)* $\|\lambda\vec v\| = |\lambda|\cdot\|\vec v\|$ für alle $\lambda\in\mathbb{K}$ und $\vec v\in V$.
*b)* $\|\vec v+\vec w\| \le \|\vec v\| + \|\vec w\|$ für alle $\vec v,\vec w\in V$.
*c)* $\|\vec v\|\ge 0$ für alle $\vec v\in V$.
*d)* $\|\vec v\| = 0$ genau dann, wenn $\vec v=\vec 0$ ist. Das Paar $(V,\|\ \|)$ heißt normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum oder kurz normierter Raum.

Bedingung *b)* wird üblicherweise als *Dreiecksungleichung* bezeichnet, denn wenn wir die Norm als Länge interpretieren besagt sie, daß für zwei Vektorenen $\vec v=\overrightarrow{AB}$ und $\vec w=\overrightarrow{BC}$ die dritte Seite $\vec v+\vec w=\overrightarrow{AC}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ nicht länger sein kann als die beiden anderen Seiten zusammen.



Beispiele von Normen sind natürlich in erster Linie die EUKLIDischen Normen auf $\mathbb{R}^n$, also

$$\|\ \|_{\text{EUKLID}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\quad \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \mapsto \sqrt{v_1^2+\dots+v_n^2}\,.$$

Entsprechend läßt sich $\mathbb{C}^n$ zum normierten Raum machen mit

$$\|\ \|_{\text{EUKLID}}: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R};\quad \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \mapsto= \sqrt{v_1\overline{v_1}+\dots+v_n\overline{v_n}}\,.$$

Eine alternative, leichter zu berechnende Norm auf $\mathbb{R}^n$ wäre

$$\|\ \|_{\max}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R};\quad \begin{pmatrix} v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix} \mapsto \max\{|v_1|,\dots,|v_n|\}\,,$$

und auch diese Norm läßt sich analog für $\mathbb{C}^n$ definieren. Es gibt aber für $n\ge 2$ weder ein EUKLIDisches Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ noch ein HERMITEsches Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$, bezüglich dessen $\|\ \|_{\max}$ die Länge eines Vektors wäre. (Für $n=1$ stimmen beide Normen miteinander und mit der üblichen Betragsfunktion überein.)

Unser zweites Standardbeispiel eines EUKLIDischen Vektorraums war der Raum $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ aller stetiger Funktionen auf dem Einheitsintervall mit

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\,dt}\,;$$

auch hier gibt es noch weitere Normen, etwa die aus der Analysis I bekannte *Supremumsnorm* (**[B]**, Seite 151)

$$\|f\|_\infty = \sup\bigl\{|f(t)| \bigm| t\in[0,1]\bigr\}\,,$$

die für Funktionen auf $[0, 1]$ (im Gegensatz zu solchen auf ganz $\mathbb{R}$) immer existiert, da eine stetige Funktion in jedem abgeschlossenen Intervall ihr Maximum annimmt. Natürlich funktionieren beide Beispiele auch, wenn man das Einheitsintervall durch ein beliebiges anderes *abgeschlossenes* Intervall ersetzt.

Wie schon erwähnt, wollen wir Normen zur Definition von Begriffen wie Konvergenz und Stetigkeit benutzen. Dazu schreiben wir im wesentlichen einfach die entsprechenden Definitionen aus der Analysis I ab. Im Augenblick wollen wir uns mit der Konvergenz begnügen; für Folgen reeller Zahlen war diese in **[B]**, (1.7), Seite 26 definiert und wird hier zur

**Definition:** $V$ sei ein normierter Raum und $\vec{v}_n \in V$ seien Elemente von $V$. Die Folge $(\vec{v}_n)$ *konvergiert* gegen den Grenzwert $\vec{v} \in V$, in Zeichen

$$\vec{v} = \lim_{n\to\infty} \vec{v}_n\,,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\|\vec{v} - \vec{v}_n\| < \varepsilon$ für alle $n > N(\varepsilon)$.

Beispiele hierfür sind natürlich alle bekannten Folgen reeller und komplexer Zahlen, aber auch Beispiele aus Funktionenräumen sind bereits aus der Analysis I bekannt: Die Tatsache, daß etwa die Exponentialfunktion überall auf $\mathbb{R}$ durch ihre TAYLOR-Reihe dargestellt wird, bedeutet nichts anderes, als daß in dem der Räume $\mathcal{C}^0([a, b])$ die Folge der Funktionen

$$f_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{t^i}{i!}$$

bezüglich der Supremumsnorm $\| \ \|_\infty$ gegen die Exponentialfunktion konvergiert.

Auch FOURIER-Reihen liefern Beispiele für konvergente Folgen, allerdings werden wir gleich sehen, daß hier die Norm $\| \ \|_2$ oft günstiger ist.



## b) Räume periodischer Funktionen

Wir gehen aus von der $L^2$-Norm

$$\|f\|_{2,T} \underset{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot\overline{f(t)}\,dt}$$

und definieren damit einen Vektorraum

$$\widetilde{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{array}{c|c} f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{C} & \|f\|_{2,T} < \infty \quad \text{und} \\ \text{integrierbar} & f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R} \end{array} \right\}$$

von Funktionen mit Periode $T$; entsprechend auch

$$\widetilde{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{array}{c|c} f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} & \|f\|_{2,T} < \infty \quad \text{und} \\ \text{integrierbar} & f(t+T) = f(t) \text{ für alle } t\in\mathbb{R} \end{array} \right\},$$

wobei man hier in der Definition von $\|f\|_{2,T}$ die komplexe Konjugation genausogut weglassen kann. Außerdem ist es für eine periodische Funktion natürlich gleichgültig, ob man von 0 bis $T$ oder von irgendeinem Startwert $a$ bis $a + T$ integriert, denn in jedem Fall hat das Integral über eine volle Periode denselben Wert.

Typische Elemente von $\widetilde{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind beispielsweise die Funktionen

$$e^{ik\omega t} \quad \text{mit} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{und} \quad k\in\mathbb{Z}\,;$$

sowohl in $\widetilde{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ als auch in $\widetilde{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ liegen die Funktionen $\cos k\omega t$ und $\sin k\omega t$ mit $\omega, k$ wie oben.

Wie in §7*c)* haben wir auch hier wieder das (glücklicherweise nicht sonderlich ernste) Problem, daß aus dem Verschwinden von $\|f\|_T$ nicht folgt, daß auch $f$ selbst überall verschwindet; offensichtliches Gegenbeispiel ist die Funktion, die an jedem ganzzahligen Vielfachen von $T$ den Wert eins annimmt und sonst überall verschwindet. Als Ausweg identifizieren wir wieder alle Funktionen, deren Differenz Norm null hat; wir schreiben also

$$f \sim g \iff \|f - g\|_T = 0$$

und bezeichnen den Vektorraum der so identifizierten Klassen von Funktionen als $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *bzw.* $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Das sind dann offensichtlich normierte Räume, in der Tat ist $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sogar ein HERMITEscher und $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein EUKLIDischer Vektorraum bezüglich des Produkts

$$(f, g) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\overline{g(t)}\, dt\,,$$

das wegen der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung für alle $f, g$ aus $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *bzw.* $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ existiert, und $\|f\|_{2,T} = \sqrt{(f, f)}$.

Ein erster wichtiger Schritt zum Verständnis von $L^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ist

**Lemma:** Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{Z}$ ist

$$(e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1 & \text{falls } k = \ell \end{cases}.$$

*Beweis:*

$$\begin{aligned} T \cdot (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) &= \int_0^T e^{ik\omega t}\overline{e^{i\ell\omega t}}\, dt = \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-i\ell\omega t}\, dt \\ &= \int_0^T e^{i(k-\ell)\omega t}\, dt \\ &= \int_0^T \cos(k-\ell)\omega t\, dt + i \int_0^T \sin(k-\ell)\omega t\, dt\,. \end{aligned}$$

Für $k \neq \ell$ integrieren wir hier eine reine Cosinus- *bzw.* Sinusschwingung über $k - \ell$ Perioden, das Ergebnis ist also null. Für $k = \ell$ dagegen wird der Cosinus identisch eins, das Integral also zu $T$, und der Sinus verschwindet identisch, womit auch das Integral gleich null ist. Division durch $T$ liefert die Behauptung.

■

Für die Sinus- und Cosinusfunktionen ist die Situation geringfügig komplizierter; da Cosinus eine gerade und Sinus eine ungerade Funktion ist, sind negative $k$ und $\ell$ uninteressant, so daß wir uns begnügen mit



**Lemma:** Mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ ist

$$(\cos k\omega t,\ \cos \ell\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 1 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases},$$

$$(\sin k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ 1/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases} \quad \text{und}$$

$$(\cos k\omega t\ \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

*Beweis:* Wir verwenden das gerade bewiesene Lemma; danach ist mit dem KRONECKER-$\delta$ ausgedrückt

$$\begin{aligned} \delta_{k\ell} = (e^{ik\omega t}, e^{i\ell\omega t}) &= (\cos k\omega t + i \sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t + i \sin \ell\omega t) \\ &= (\cos k\omega t,\ \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t,\ \sin \ell\omega t) \\ &\quad + i(\sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t) - i(\cos k\omega t,\ \sin \ell\omega t)\,, \end{aligned}$$

also ist

$$(\cos k\omega t,\ \cos \ell\omega t) + (\sin k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t) - (\cos k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Diese Gleichungen gelten auch, wenn wir $\ell$ durch $-\ell$ ersetzen und werden dann zu

$$(\cos k\omega t,\ \cos \ell\omega t) - (\sin k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = \delta_{k,-\ell}$$

und

$$(\sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t) + (\cos k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Addiert *bzw.* subtrahiert man jeweils zwei der sich nur im Vorzeichen unterscheidenden Gleichungen, folgt, daß für $k, \ell \geq 0$

$$2(\cos k\omega t,\ \cos \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k,-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 2 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist und

$$2(\sin k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = \delta_{k\ell} + \delta_{k,-\ell} = \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq \ell \\ 1 & \text{für } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{für } k = \ell = 0 \end{cases};$$

außerdem ist

$$(\sin k\omega t,\ \cos \ell\omega t) = (\cos k\omega t,\ \sin \ell\omega t) = 0\,.$$

Damit ist alles bewiesen. ■

Ein Leser, der noch nicht davon überzeugt ist, daß komplexe Zahlen und Funktionen auch im Reellen nützlich sind, sollte versuchen, dies rein reell zu beweisen: er muß also zeigen, daß

$$\int_0^T \cos k\omega t\ \cos \ell\omega t\, dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ T & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

und

$$\int_0^T \sin k\omega t\ \sin \ell\omega t\, dt = \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq \ell \\ T/2 & \text{falls } k = \ell \neq 0 \\ 0 & \text{falls } k = \ell = 0 \end{cases}$$

ist, sowie

$$\int_0^T \cos k\omega t\ \sin \ell\omega t\, dt = 0\,.$$

Eine ganze Reihe dieser Integrationen sind trivial, und alle sind rein reell durchführbar. Dennoch ist der Arbeitsaufwand für einen rein reellen Beweis deutlich größer als als für den obigen Beweis.

Mit den Bezeichnungen, die wir im Zusammenhang mit EUKLIDischen und HERMITEschen Vektorräumen eingeführt haben, können wir die beiden Lemmata auch knapper formulieren:

*1.)* Die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ für $k \in \mathbb{Z}$ eine HERMITEsche Orthonormalbasis des von ihnen aufgespannten Untervektorraums $U_\mathbb{C}$ von $\mathrm{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

*2.)* Die Funktionen $1$, $\sqrt{2}\cos k\omega t$ und $\sqrt{2}\sin \ell\omega t$ für $k, l \in \mathbb{N}$ bilden eine Orthonormalbasis des von ihnen aufgespannten Untervektorraums $U_\mathbb{R}$ von $\mathrm{L}^2_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Zumindest für Funktionen aus $U_\mathbb{C}$ und $U_\mathbb{R}$ ist damit klar, wie man sie in reine Schwingungen zerlegen kann:



### c) Harmonische Analyse auf $U_\mathbb{C}$ und $U_\mathbb{R}$

Aufgabe der harmonischen Analyse ist es, eine aus einer Grund- und verschiedenen Oberschwingungen zusammengesetzte Funktion wieder in ihre Bestandteile zu zerlegen. Die Anzahl dieser Bestandteile muß nicht unbedingt endlich sein; um das Prinzip besser zu verstehen beginnen wir aber mit Funktionen aus $U_\mathbb{C}$ und $U_\mathbb{R}$, die nach Definition des von einer Menge von Vektoren aufgespannten Untervektorraums allesamt endliche Linearkombinationen der Basisfunktionen sind.

Wir betrachten zunächst den komplexen Fall, wo – wie üblich – alles etwas einfacher ist. Wir nehmen also an, wir hätten eine Funktion der Form

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{M} c_k e^{ki\omega t}$$

gegeben, und wir möchten die Koeffizienten $c_k$ bestimmen.

Bei der Betrachtung von Orthonormalbasen haben wir gesehen, daß in jedem HERMITEschen Vektorraum $V$ gilt: Sind $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r$ Vektoren aus einer Orthonormalbasis von $V$, so läßt sich ein beliebiger Vektor aus $V$ schreiben als

$$\vec{v} = c_1\vec{b}_1 + \cdots + c_r\vec{b}_r \quad \text{mit} \quad c_k = (\vec{v},\ \vec{b}_k)\,.$$

In unserem speziellen Fall ist daher

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{e^{ki\omega t}}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-ki\omega t}\, dt\,.$$

Genauso, wenn auch ein bißchen umständlicher, geht es im Reellen: Hier können wir eine Funktion aus $U_\mathbb{R}$ schreiben als

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} a_k \cos k\omega t + \sum_{\ell=1}^{M} b_k \sin k\omega t\,.$$

Die Koeffizienten $a_k, b_\ell$ und $c_0$ der Basisdarstellung können wir wieder wie oben über Skalarprodukte mit dem entsprechenden Basisvektor berechnen oder direkt über die EULERschen Formeln; wir erhalten

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t\,dt$$

$$b_\ell = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin \ell\omega t\,dt\,.$$

### d) Harmonische Analyse periodischer Funktionen

Die Bedingung, daß $f(t)$ als Summe endlich vieler reiner Schwingungen gegeben sein soll, schränkt die Brauchbarkeit dieses Resultats leider erheblich ein: Ein periodischer Rechteckimpuls etwa läßt sich so nicht behandeln.

Wir können aber jedes beliebige Element von $L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ die Skalarprodukte $c_k = (f,\, e^{ik\omega t})$ berechnen und hoffen, daß sie für eine harmonische Analyse von $f$ nützlich sind; wir definieren

**Definition:** Die FOURIER-Transformierte einer Funktion $f \in L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ ist die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \\ k \mapsto (f,\, e^{k\cdot i\omega t}) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\,. \end{cases}$$

(Man beachte, daß diese FOURIER-Transformation einer *periodischen* Funktion nur auf $\mathbb{Z}$ definiert ist: Periodische Funktionen haben kein kontinuierliches Frequenzspektrum, sondern nur Oberschwingungen zu ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz).



Als FOURIER-*Reihe* von $f$ bezeichnen wir die zunächst nur formale unendliche Summe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{-k\cdot i\omega t}\,.$$

Natürlich ist im Augenblick weder klar, ob diese Summe überhaupt existiert, d.h. also, ob der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{-k\cdot i\omega t}$$

für alle (oder zumindest fast alle) $t \in \mathbb{R}$ existiert, noch ist klar, ob er dort, wo er existiert, gleich $f(t)$ ist.

JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768–1830) begann zunächst mit einer Ausbildung zum Priester, beendete diese jedoch nicht, sondern wurde stattdessen Mathematiklehrer. 1793 trat er dem lokalen Revolutionskomittee bei, 1798 begleitete er Napoleon auf dessen Ägyptenfeldzug. Nach dem Rückzug aus Ägypten ernannte ihn Napoleon zum Präfekten von Isére; dort in Grenoble begann er mit seinen Arbeiten über Wärmeleitung, aus denen die FOURIER-Reihen hervorgingen. Nach Napoleons endgültiger Vertreibung wurde FOURIER 1817 in die Akademie der Wissenschaften gewählt; 1822 wurde er Sekretär der mathematischen Sektion.

Um zu sehen, ob die gerade definierten FOURIER-Reihen nützlich sind, empfiehlt es sich, zunächst etwas mit einem Beispiel zu experimentieren, etwa mit dem periodischen Rechteckimpus

$$f(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} \le t < T \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(t{+}T) = f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Hier ist

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = 0$$

und für $k \neq 0$ ist

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-k\cdot i\omega t}\,dt \\
&= \frac{h}{T}\left(\int_0^{T/2} e^{-k\cdot i\omega t}\,dt - \int_{T/2}^{T} e^{-k\cdot i\omega t}\,dt\right) \\
&= \frac{h}{T}\,\frac{-1}{ki\omega}\left(e^{-k\cdot i\omega\frac{T}{2}} - 1 - e^{-k\cdot i\omega T} + e^{-k\cdot i\omega\frac{T}{2}}\right) .
\end{aligned}$$

Da die Periode $T$ eine Länge von $\frac{2\pi}{\omega}$ hat, ist $\omega T = 2\pi$, d.h.

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{-h}{2k\pi i}\left(e^{-k\pi i} - 1 - e^{-2k\pi i} + e^{-k\pi i}\right) = \frac{-h}{2k\pi i}\left(-2 + 2e^{-k\pi i}\right) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für gerade } k \\ \dfrac{2hi}{k\pi} & \text{für ungerade } k \end{cases} .
\end{aligned}$$

Die FOURIER-Reihe ist daher gleich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{k\cdot i\omega t} &= \frac{-2hi}{\pi}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{e^{k\cdot i\omega t}}{k} \\
&= \frac{-2hi}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \left(\frac{e^{k\cdot i\omega t}}{k} + \frac{e^{-k\cdot i\omega t}}{-k}\right) \\
&= \frac{-2i\cdot 2hi}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\sin(k\omega t)}{k} \\
&= \frac{4h}{\pi}\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\sin(2\ell+1)\omega t}{2\ell+1} .
\end{aligned}$$

Wir sollten nicht zu optimistisch sein und erwarten, daß diese FOURIER-Reihe in jedem Punkt $t$ gegen $f(t)$ konvergiert: Wir hätten einen Rechteckimpuls mit Periode $T$ im Intervall $[0,T)$ auch durch



$$g(t) = \begin{cases} h & \text{für } 0 \le t \le \frac{T}{2} \\ -h & \text{für } \frac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

definieren können; da sich $f(t)$ und $g(t)$ im Intervall $[0,T]$ nur an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ unterscheiden, haben beide dieselbe FOURIER-Transformierte und damit auch dieselbe FOURIER-Reihe. Diese kann daher, selbst wenn sie konvergiert, an der Stelle $t = \frac{T}{2}$ nicht sowohl gegen $f(\frac{T}{2}) = -h$ und $g(\frac{T}{2}) = h$ konvergieren. (Tatsächlich konvergiert sie, da $\omega\frac{T}{2} = \pi$ ist und der Sinus bei allen Vielfachen von $\pi$ verschwindet, gegen den Mittelwert null der beiden Funktionswerte.)

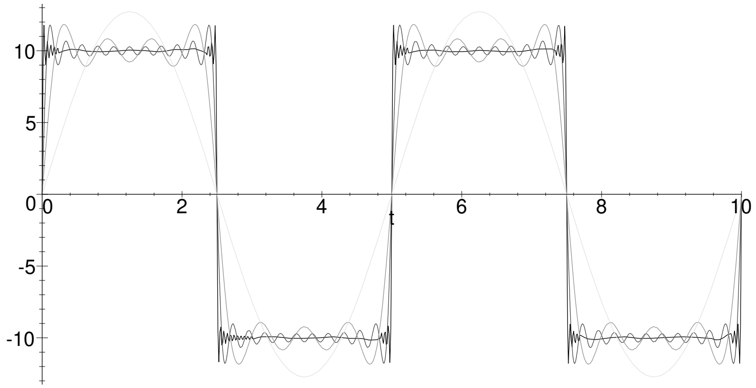
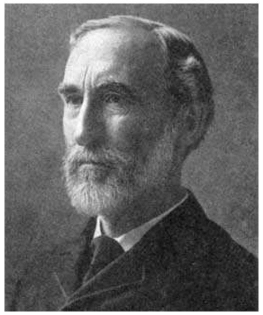



Abb. 26: FOURIERpolynome für Rechteckimpulse

Experimentell konvergiert die berechnete Reihe abgesehen von den Sprungstellen anscheindend recht gut: Abbildung 26 zeigt die Teilsummen mit unterer und oberer Grenze $\pm 1$, $\pm 3$, $\pm 10$ und $\pm 50$, die die Funktion $f$ offensichtlich immer besser annähern. Gerade für die größeren Werte ist dieses Bild natürlich etwas gestört durch numerische Fehler und *alias*-Effekte der Rastergraphik; keine solche Störung sind allerdings die Überschwingungen an den Unstetigkeitsstellen von $f$: Dieses sogenannte GIBBS-Phänomen ist eine mathematisch unvermeidbare und wohlbekannte Eigenschaft von FOURIERreihen stückweise stetiger Funktionen.



JOSIAH WILLARD GIBBS (1839–1903) promovierte 1863 an der amerikanischen Yale-Universität mit einer Arbeit über Zahnradgetriebe; die erste amerikanische Dissertation auf dem Gebiet des Ingenieurwesens. Danach unterrichtete er in Yale Latein und Naturphilosophie, bis er 1866 nach Europa fuhr, wo er 1868/1869 in Heidelberg bei KIRCHHOFF und HELMHOLTZ studierte. 1871 wurde er in Yale Professor für mathematische Physik, 1873 publizierte er seine erste Arbeit, die sich, wie viele der folgenden, mit Thermodynamik befaßte. Sehr einflußreich waren auch seine Arbeiten über die elektromagnetische Theorie des Lichts und zur Vektoranalysis.

## d) Konvergenz von Fourier-Reihen

Wir betrachten zur FOURIER-Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{k\cdot i\omega t}$$

die Teilsummen

$$s_n \underset{\text{def}}{=} \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{k\cdot i\omega t}$$

und wollen deren Konvergenz in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ untersuchen. Unser Ziel ist

**Satz:** *a)* Für eine periodische Funktion $f \in L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{C})$ konvergiert die Folge der Teilsummen $s_n$ in der $L^2$-Norm gegen $f$.
*b)* Für jeden Punkt $t \in \mathbb{R}$, in dem $f$ stetig ist, ist sogar

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{k\cdot i\omega t}\,.$$

*c)* Ist $f$ stückweise stetig, so konvergiert die FOURIER-Reihe in jedem Punkt $t \in \mathbb{R}$ gegen den Mittelwert aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert von $f$ an der Stelle $t$.

*Beweis:* Wir überlegen uns zunächst, daß die Folge der $s_n$ in der $L^2$-Norm überhaupt konvergiert. Dazu verwenden wir das CAUCHYsche



Konvergenzkriterium: Falls für jedes $r > 0$ die Folge der Abstände $\|s_{n+r} - s_n\|_{2,T}$ eine Nullfolge ist, konvergiert die Folge der $s_n$ bezüglich der $L^2$-Norm.

Hier ist

$$\begin{aligned}\|s_{n+r} - s_n\|^2_{2,T} &= \big((s_{n+r} - s_n),\, (s_{n+r} - s_n)\big)\\ &= (s_{n+r},\, s_{n+r}) - (s_{n+r},\, s_n) - (s_n,\, s_{n+r}) + (s_n,\, s_n)\,.\end{aligned}$$

Da die Funktionen $e^{k\cdot i\omega t}$ eine Orthonormalbasis des von Ihnen aufgespannten Vektorraums bilden, ist für

$$g(t) = \sum_{k=a}^{b} c_k e^{k\cdot i\omega t} \quad \text{und} \quad h(t) = \sum_{k=a}^{b} d_k e^{k\cdot i\omega t}$$

das HERMITEsche Produkt

$$(g,\, h) = \sum_{k=a}^{b} c_k \overline{d_k}\,,$$

also ist

$$(s_n,\, s_n) = (s_{n+r},\, s_n) = (s_n,\, s_{n+r}) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k)} = \sum_{k=-n}^{n} \left|\widehat{f}(k)\right|^2$$

und

$$(s_{n+r},\, s_{n+r}) = \sum_{k=-(n+r)}^{n+r} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{f}(k)} = \sum_{k=-(n+r)}^{n+r} \left|\widehat{f}(k)\right|^2\,.$$

Damit ist

$$\begin{aligned}\|s_{n+r} - s_n\|^2_{2,T} &= \sum_{k=-(n+r)}^{n+r} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 - \sum_{k=-n}^{n} \left|\widehat{f}(k)\right|^2\\ &= \sum_{k=n+1}^{n+r} \left(\left|\widehat{f}(k)\right|^2 + \left|\widehat{f}(-k)\right|^2\right)\,.\end{aligned}$$

Darauf wenden wir noch einmal das CAUCHYsche Konvergenzkriterium an, dieses Mal aber für die Folge reeller Zahlen

$$\|s_n\|^2_{2,T} = \sum_{k=-n}^{n} \left|\widehat{f}(k)\right|^2\,.$$