Als erstes *Beispiel* zum GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahren betrachten wir den Untervektorraum V des $\mathbb{R}^5$, der von den drei Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2\\2\\3\\4\\4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 4\\4\\3\\2\\4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 3\\3\\3\\6\\1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

Im ersten Schritt setzen wir einfach $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$.

Im zweiten Schritt müssen wir einen Vektor

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1$$

finden, so daß $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ ist. Da $\vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 = 49$ und $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 49$ beide gleich sind, müssen wir nach GRAM-SCHMIDT $\lambda_1 = -1$ setzen, d.h.

$$\vec{c}_2 = \vec{b}_2 - \vec{c}_1 = \vec{b}_2 - \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2\\2\\0\\-2\\0 \end{pmatrix}.$$

Im dritten Schritt suchen wir einen Vektor

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 + \mu_1 \vec{c}_1 + \mu_2 \vec{c}_2$$

mit $\vec{c}_3 \cdot \vec{c}_1 = \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$. Da $\vec{b}_3 \cdot \vec{c}_1 = \vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 49$ ist, setzen wir $\mu_1 = -1$; der zweite Koeffizient μ_2 ist Null, da $\vec{b}_3$ und $\vec{c}_2$ bereits orthogonal sind. Damit wird

$$\vec{c}_3 = \vec{b}_3 - \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\2\\-3 \end{pmatrix}.$$

Schließlich müssen wir diese Orthogonalbasis noch zur Orthonormalbasis machen; wegen

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1 = 49, \quad \vec{c}_2 \cdot \vec{c}_2 = 12 \quad \text{und} \quad \vec{c}_3 \cdot \vec{c}_3 = 15$$

müssen wir die Vektoren $\vec{c}_i$ noch durch

$$\|\vec{c}_1\| = 7, \quad \|\vec{c}_2\| = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \|\vec{c}_2\| = \sqrt{15}$$

dividieren und erhalten eine Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ mit

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2/7\\2/7\\3/7\\4/7\\4/7 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3\\\sqrt{3}/3\\0\\-\sqrt{3}/3\\0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{15}/15\\\sqrt{15}/15\\0\\2\sqrt{15}/15\\-\sqrt{15}/5 \end{pmatrix}.$$

Um auch den Umgang mit HERMITEschen Skalarprodukten und das Rechnen mit komplexen Zahlen zu üben, betrachten wir als *zweites Beispiel* den von

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1\\i\\-i\\-1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1+2i\\-2+i\\-i\\-1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1+2i\\-i\\-4-i\\1+2i \end{pmatrix}$$

aufgespannten Untervektorraum von $\mathbb{C}^4$.

Wieder können wir bei der Anwendung des GRAM-SCHMIDTschen Orthogonalisierungsverfahrens $\vec{c}_1 = \vec{b}_1$ setzen; im zweiten Schritt suchen wir einen Vektor $\vec{c}_2 = \vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1$ mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) \cdot \vec{c}_1 = \vec{b}_2 \cdot \vec{c}_1 + \lambda_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

ist. Bis hierher geht alles genauso wie im reellen Fall, allerdings war es dort völlig irrelevant, ob wir $\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = 0$ oder $\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = 0$ fordern wollten. Hier im Komplexen ist das zwar grundsätzlich auch noch irrelevant, denn wegen der Eigenschaft

$$\vec{c}_2 \cdot \vec{c}_1 = \overline{\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2}$$

verschwindet das eine Produkt genau dann, wenn auch das andere verschwindet. Rechnerisch gibt es allerdings einen Unterschied, denn

$$\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_2 = \vec{c}_1 \cdot (\vec{b}_2 + \lambda_1 \vec{c}_1) = \vec{c}_1 \cdot \vec{b}_2 + \overline{\lambda}_1 (\vec{c}_1 \cdot \vec{c}_1) = 0$$

bestimmt $\overline{\lambda}_1$, nicht λ_1. Falls man dies beachtet, erhält man natürlich bei beiden Ansätzen denselben Wert von λ_1. um die komplexe Konjugation zu vermeiden, wählen wir hier den ersten Weg. Dazu benötigen wir die HERMITEschen Skalarprodukte

$$\vec b_2\cdot\vec c_1=\begin{pmatrix}1+2i\\-2+i\\-i\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix}\quad\text{und}\ \vec c_1\cdot\vec c_1=\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix}.$$

Bei deren Berechnung darf man auf keinen Fall vergessen, die Einträge des jeweils zweiten Vektors komplex zu konjugieren, d.h.

$$\begin{aligned}\vec b_2\cdot\vec c_1&=(1+2i)\cdot\overline{1}+(-2+i)\cdot\overline{i}+(-i)\cdot(\overline{-i})+(-1)\cdot\overline{(-1)}\\&=(1+2i)\cdot 1+(-2+i)\cdot(-i)+(-i)\cdot i+(-1)\cdot(-1)\,.\\&=(1+2i)+(1+2i)+1+1=4+4i\end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$\begin{aligned}\vec c_1\cdot\vec c_1&=1\cdot\overline{1}+i\cdot\overline{i}+(-i)\cdot(\overline{-i})+(-1)\cdot(\overline{-1})\\&=1\cdot 1+i\cdot(-i)+(-i)\cdot i+(-1)\cdot(-1)=1+1+1+1=4\,,\end{aligned}$$

wobei das allerdings auch mit weniger Mühe einzusehen ist: Da für einen Vektor $\vec v\in\mathbb{C}^n$ mit Komponenten $v_1,\dots,v_n$

$$\vec v\cdot\vec v=\sum_{i=1}^n v_i\cdot\overline{v_i}=\sum_{i=1}^n |v_i|^2$$

ist, hätte es genügt, einfach die Betragsquadrate der vier Einträge aufzusummieren, wobei im vorliegenden Fall trivial ist, daß alle diese Beträge gleich eins sind.

Einsetzen der beiden Skalarprodukte in die Gleichung für λ_1 zeigt, daß

$$(4+4i)+4\lambda_1=0\quad\text{und damit}\quad\lambda_1=\frac{-4-4i}{4}=-1-i$$

sein muß. Somit ist

$$\begin{aligned}\vec c_2=\vec b_2+\lambda_1\vec c_1&=\begin{pmatrix}1+2i\\-2+i\\-i\\-1\end{pmatrix}-(1+i)\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1+2i\\-2+i\\-i\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+i\\-1+i\\1-i\\-1-i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\-1\\-1\\i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Im dritten Schritt muß ein Vektor

$$\vec c_3=\vec b_3+\mu_1\vec c_1+\mu_2\vec c_2$$

berechnet werden mit

$$\vec c_3\cdot\vec c_1=\vec c_3\cdot\vec c_2=0\,.$$

Hier ist

$$\vec c_3\cdot\vec c_1=\vec b_3\cdot\vec c_1+\mu_1\vec c_1\cdot\vec c_1+\mu_2\vec c_2\cdot\vec c_1=\vec b_3\cdot\vec c_1+\mu_1\vec c_1\cdot\vec c_1\,,$$

da der zweite Schritt sicherstellte, daß $\vec c_2\cdot\vec c_1=0$ ist. Das HERMITEsche Skalarprodukt $\vec c_1\cdot\vec c_1=4$ kennen wir bereits, und eine kurze Rechung zeigt, daß

$$\vec b_3\cdot\vec c_1=(1+2i)+(-1)+(1-4i)+(-1-2i)=-4i$$

ist. Also folgt

$$\mu_1=-\frac{\vec b_3\cdot\vec c_1}{\vec c_1\cdot\vec c_1}=-\frac{-4i}{4}=i$$

und entsprechend folgt auch

$$\mu_2=-\frac{\vec b_3\cdot\vec c_2}{\vec c_2\cdot\vec c_2}=-\frac{8}{4}=-2\,,$$

wobei diesesmal die genaue Berechnung der beiden HERMITEschen Skalarprodukte dem Leser als Übungsaufgabe überlassen sei. Der dritte Basisvaktor $\vec c_3=\vec b_3+i\vec c_1-2\vec c_2$ ist daher gleich

$$\begin{pmatrix}1+2i\\-i\\-4-i\\1+2i\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1\\i\\-i\\-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}i\\-1\\-1\\i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+i\\1-i\\-1-i\\1-i\end{pmatrix}.$$

Damit ist eine *Orthogonalbasis* gefunden; wenn wir eine *Orthonormalbasis* wollen, müssen wir die Vektoren noch durch ihre Längen dividieren: Wir wissen bereits, daß $\vec c_1\cdot\vec c_1=\vec c_2\cdot\vec c_2=4$ ist, so daß die ersten beiden Vektoren die Länge zwei haben; $\vec c_3$ hat vier Komponenten vom Betrag zwei, also ist

$$\vec c_3\cdot\vec c_3=4\cdot 2=8\quad\text{und}\quad\|\vec c_2\|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}\,.$$

Die gesuchte Orthonormalbasis besteht daher aus den Vektoren

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\\ -i\\ 1\end{pmatrix},\quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}i\\ -1\\ -1\\ i\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad \frac{\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix}1+i\\ 1-i\\ -1-i\\ 1-i\end{pmatrix}.$$

Damit ist hoffentlich klar, wie man Orthonormalbasen berechnet. Aber wozu sind Orthonormalbasen gut? Eine wichtiger Grund für ihre Anwendung ist der folgende

Satz: $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ sei eine Orthonormalbasis eines EUKLIDischen oder HERMITEschen Vektorraums V.
a) Sind $\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n$ und $\vec{w} = b_1\vec{e}_1 + \cdots + b_n\vec{e}_n$ zwei Vektoren aus V, so ist

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_j}\,.$$

b) Für einen Vektor $\vec{v} \in V$ ist

$$\vec{v} = a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n \quad\text{mit}\quad a_i = \cdot\vec{e}_i\,.$$

Der *Beweis* ist in beiden Fällen ein Einzeiler:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\;\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_j}\,,\quad\text{denn}\quad \vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{e}_i = (a_1\vec{e}_1 + \cdots + a_n\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} a_j\vec{e}_j\cdot\vec{e}_i = a_i\,.$$

Bezüglich einer Orthonormalbasis sieht also jedes (gewöhnliche oder HERMITEsche) Skalarprodukt aus wie das entsprechende Standardskalarprodukt – und das unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis. Sobald man Vektoren bezüglich einer Orthonormalbasis dargestellt hat, lassen sich also alle Skalarprodukte sowie auch die Basisdarstellung eines beliebigen Vektors auf die einfachst denkbare Weise berechnen. Bei der FOURIER-Analyse werden wir sehen, daß dieser Satz – angewandt auf zwei verschiedene Ortonormalbasen – auch Anwendungen hat, die weit über die einfache Berechenbarkeit hinausgehen.

e) Eigenwerte symmetrischer und Hermitescher Matrizen

Wie wir im letzten Paragraphen gesehen haben, kann die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts kleiner sein als die algebraische, und im Falle einer reellen Matrix müssen nicht auch die Eigenwerte reell sein. In diesem Abschnitt wollen wir sehen, daß solche Dinge bei symmetrischen (und auch den noch zu definierenden HERMITEschen) Matrizen nicht möglich sind.

Zunächst aber wollen wir sehen, was symmetrische und HERMITEsche Matrizen überhaupt mit den bislang diskutierten Skalarprodukten zu tun haben.

Dazu sei V ein endlichdimensionaler EUKLIDischer Vektorraum, und $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ sei eine Basis von V. Für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{b}_i \quad\text{und}\quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i\vec{b}_i$$

ist dann wegen der Linearität des Skalarprodukts in beiden Argumenten

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i\vec{b}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\vec{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_iw_j\,\vec{b}_i\cdot\vec{b}_j\,.$$

Setzen wir

$$c_{ij} \underset{\text{def}}{=} \vec{b}_i\cdot\vec{b}_j\,,$$

so ist wegen der Symmetrie des Skalarprodukts $c_{ij} = c_{ji}$, wir haben also eine $n \times n$-Matrix C, die gleich Ihrer transponierten Matrix ist.

Definition: Eine Matrix $C \in k^{n\times n}$ heißt *symmetrisch,* wenn ${}^tC = C$ ist.

Die Matrix C ist also symmetrisch, und sie legt das Skalarprodukt eindeutig fest, denn für zwei beliebige Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ wie oben ist

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_iw_j\cdot c_{ij}\,.$$

Diese Formel definiert umgekehrt auch für jede symmetrische Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine bilineare Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, allerdings muß diese nicht positiv definit und damit kein Skalarprodukt sein.

Ist V ein HERMITEscher Vektorraum, wieder mit Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$, so ist jetzt für zwei Vektoren

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \quad \text{und} \quad \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} w_i \vec{b}_i \quad \text{mit} \quad v_i, w_i \in \mathbb{C}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{b}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \vec{b}_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} v_i \overline{w}_j \, \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \, .$$

Setzen wir auch hier wieder

$$c_{ij} \underset{\text{def}}{=} \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j \, ,$$

so ist nun $c_{ij} = \overline{c_{ji}}$. Matrizen mit dieser Eigenschaft wollen wir als HERMITEsch bezeichnen.

Um dies etwas kompakter ausdrücken zu können, definieren wir

Definition: *a)* Für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ bezeichnen wir die Matrix $\overline{A} = \left(\overline{a_{ij}}\right)$ als die zu A *konjugiert komplexe Matrix.*
b) $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt HERMITEsch, falls ${}^t\!A = \overline{A}$ ist.
c) Zu einem Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ heißt $\overline{\vec{v}} = \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$ der *konjugiert komplexe* Vektor.

(Letztere Schreibweise sieht zwar grausam aus, vor allem wann man sie mit der sehr viel schöneren Alternative $\overline{\mathfrak{v}}$ vergleicht; sie läßt sich aber nicht vermeiden, wenn man Vektoren mit Pfeilen kennzeichnen will.)

Schließlich wollen wir Vektoren hier mit $1 \times n$-Matrizen identifizieren; insbesondere rechnen wir mit dem „transponierten Vektor"

$${}^t\vec{v} = (v_1, \dots, v_n) \, .$$

Mit dieser Bezeichnung kann das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ als Matrixprodukt ${}^t\vec{v}\vec{w}$ geschrieben werden; das Standard-HERMITEsche Produkt in $\mathbb{C}^n$ ist entsprechend ${}^t\vec{v}\,\overline{\vec{w}}$.

Da die komplexe Konjugation auf $\mathbb{R}$ keine Wirkung hat, ist eine HERMITEsche Matrix mit reellen Einträgen einfach eine symmetrische Matrix; wir können uns im folgenden bei den Beweisen daher auf HERMITEsche Matrizen beschränken und erhalten trotzdem Ergebnisse, die auch für reelle symmetrische Matrizen gelten.

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist

Satz: A sei eine symmetrische reelle oder HERMITEsche (komplexe) Matrix.
a) Dann sind alle Eigenwerte von A reell.
b) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal bezüglich des Standard- *bzw.* HERMITEschen Skalarprodukts.
c) Für jeden Eigenwert von A ist die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit.
d) $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{C}^n$ hat eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A.

Beweis: a) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so gibt es nach Definition einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$, so daß $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ ist. Da die komplexe Konjugation sämtliche Rechenoperationen respektiert, ist dann auch

$$\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\vec{v}} \, ,$$

also ist

$${}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}} \, .$$

Andererseits ist ${}^t(A\vec{v}) = {}^t\vec{v}\;{}^t\!A$ und da A als HERMITEsch vorausgesetzt wird, ist ${}^t\!A = \overline{A}$. Also ist ${}^t\vec{v}\,\overline{A} = \lambda\,{}^t\vec{v}$ und

$${}^t\vec{v}\,\overline{A}\,\overline{\vec{v}} = \lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}} \, .$$

Somit ist

$$\lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}} = \overline{\lambda}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{v}} \, ,$$

und da ${}^t\vec{v}\overline{\vec{v}}$ für einen Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ nicht verschwindet, folgt $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. λ ist reell.

b) $\vec{v}$ sei Eigenvektor zum Eigenwert λ, und $\vec{w}$ sei Eigenvektor zum davon verschiedenen Eigenwert μ, d.h.

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{und} \quad A\vec{w} = \mu\vec{w} \, .$$

Dann ist

$$\lambda\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{w}} = {}^t(\lambda\vec{v})\overline{\vec{w}} = {}^t(A\vec{v})\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\,{}^t\!A\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{A}\,\overline{\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{A\vec{w}} = {}^t\vec{v}\overline{\mu\vec{w}} = \overline{\mu}\,{}^t\vec{v}\overline{\vec{w}} \, .$$

Da wir schon wissen, daß alle Eigenwerte reell sind, ist $\overline{\mu} = \mu \neq \lambda$. Die obige Gleichungskette kann daher nur richtig sein, wenn ${}^t\vec{v}\overline{\vec{w}}$ verschwindet, d.h. wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ orthogonal sind.

Beim Beweis von *c)* gehen wir im wesentlichen genauso vor wie in §*6i* als wir zeigten, daß die geometrische Vielfachheit eines Eigengenwerts stets kleiner oder gleich der algebraischen ist; die zusätzliche Annahme über die Matrix A wird uns dann zeigen, daß hier die beiden Vielfachheiten sogar gleich sind.

λ sei also ein Eigenwert von A mit geometrischer Vielfachheit r, d.h. der zugehörige Eigenraum habe die Dimension r. Wir wählen eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ und ergänzen diese zu einer Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ des gesamten Vektorraums $V = \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Da wir es hier nur mit diesen beiden speziellen Vektorräumen zu tun haben, können wir, indem wir nötigenfalls das GRAM-SCHMIDTsche Orthogonalisierungsverfahren anwenden und anschließend die Längen aller Vektoren auf eins normieren, annehmen, daß es sich dabei um eine Orthonormalbasis handelt.

Nun betrachten wir die lineare Abbildung

$$\varphi: V \to V; \quad \vec{v} \mapsto A\vec{v}\,.$$

Bezüglich der Standardbasis hat sie natürlich A als Abbildungsmatrix; für uns interessanter ist aber die Abbildungsmatrix $A_{\mathcal{B}}$ bezüglich der neuen Basis $\mathcal{B}$. Dazu sei B die Matrix, deren Spalten die Vektoren $\vec{b}_i$ sind; da der Eintrag an der Stelle (i,j) eines Matrixprodukts das (Standard-)Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors des ersten Faktors mit dem j-ten Spaltenvektor des zweiten Faktors ist, steht an der Stelle (i,j) der Matrix ${}^tB\overline{B}$ das (Standard) HERMITEsche Produkt der Vektoren $\vec{b}_i$ und $\vec{b}_j$, und da $\mathcal{B}$ als Orthonormalbasis gewählt wurde, ist deshalb

$${}^tB\overline{B} = E \quad \text{und damit} \quad {}^tB = \overline{B}^{\,-1} = \overline{B^{-1}}\,.$$

Aus dieser Formel folgt, daß mit A auch $A_{\mathcal{B}}$ eine HERMITEsche Matrix ist, denn

$${}^tA_{\mathcal{B}} = {}^t(B^{-1}AB) = {}^tB\;{}^tA\;{}^tB^{-1} = \overline{B^{-1}}\,\overline{A}\,\overline{B} = \overline{B^{-1}AB} = \overline{A_{\mathcal{B}}}\,.$$

Die ersten r Basisvektoren $\vec{b}_i$ sind Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ; für $i \le r$ ist daher $\varphi(\vec{b}_i) = \lambda\vec{b}_i$, d.h. in der i-ten Spalte von $A_{\mathcal{B}}$

steht an der i-ten Stelle die reelle Zahl λ und ansonsten überall die Null, genau wie auch in §*6i*. Im Gegensatz zu dort haben wir nun aber eine HERMITEsche Matrix; da in der i-ten Spalte abgesehen vom λ auf der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen, muß daher dasselbe auch für die i-te Zeile gelten; die Matrix $A_{\mathcal{B}}$ hat also die Form

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei M eine $(n-r) \times (n-r)$-Matrix ist, die uns nicht weiter zu interessieren braucht. Damit hat $A_{\mathcal{B}} - xE$ die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda - x & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda - x & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & M - xE_{n-r} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & & & \end{pmatrix},$$

wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Das charakteristische Polynom von $A_{\mathcal{B}}$ ist nach dem Multiplikationssatz für Determinanten gleich

$$\begin{aligned} \det(A_{\mathcal{B}} - xE) &= \det(B^{-1}AB - xE) = \det\bigl(B^{-1}(A - xE)B\bigr) \\ &= \det(B)^{-1}\det(A - xE)\det B = \det(A - xE)\,, \end{aligned}$$

denn die Diagonalmatrix xE ist mit jeder anderen Matrix vertauschbar. Somit haben A und $A_{\mathcal{B}}$ dasselbe charakterische Polynom; da wir die Matrix $A_{\mathcal{B}}$ besser kennen, rechnen wir mit ihr.

Wie in §*6i* folgt auf Grund der obigen Form der Matrix $A - xE$ aus dem LAPLACEschen Entwicklungssatz, daß

$$\det(A - xE) = \det(A_{\mathcal{B}} - xE) = (\lambda - x)^r \det(M - xE_{n-r})$$

ist, wobei E_{n-r} die $(n-r) \times (n-r)$-Einheitsmatrix bezeichnet. Wir müssen zeigen, daß die algebraische Vielfachheit von λ *genau* gleich r ist, daß also λ keine Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$ sein kann.

Wäre λ Nullstelle von $\det(M - xE_{n-r})$, so hätte M den Eigenwert λ, es gäbe also einen $(n-r)$-dimensionalen Eigenvektor $\vec{w}$ von M. Wegen der speziellen Form der Matrix $A_{\mathcal{B}}$ ist für jeden Eigenvektor

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \quad \text{von } M \text{ der Vektor} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w_{r-1} \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von $A_{\mathcal{B}}$ und damit von A – Eigenvektoren hängen schließlich nur von der linearen Abbildung ab, nicht von einer speziellen Abbildungsmatrix. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß der Eigenraum zum Eigenwert λ von $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_r$ erzeugt wird, denn $\vec{v}$ ist linear unabhängig von diesen $\vec{b}_i$.

Also hat λ die algebraische Vielfachheit r, und *c)* ist gezeigt.

d) ist nun eine einfache Folgerung aus den übrigen Aussagen: Wir wissen, daß die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich der Dimension n des Vektorraums ist; da die algebraischen gleich den geometrischen Vielfachheiten sind, gibt es also insgesamt n Eigenvektoren, die eine Basis von V bilden.

Für jeden einzelnen Eigenraum können wir die Eigenvektoren so wählen, daß sie eine Orthonormalbasis bilden; da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal sind, ist die Vereinigungsmenge dieser Basen Orthonormalbasis von V. ■

f) Euklidische Geometrie

In affinen Räumen konnten wir Geraden und Ebenen durch lineare Gleichungssysteme beschreiben, wir konnten aber keine Längen und Winkel messen, da so etwas in einem beliebigen Vektorraum nicht definiert ist. Nachdem wir nun EUKLIDische Vektorräume zur Verfügung haben, können wir EUKLIDische Räume einführen als affine Räume sein zu EUKLIDischen Vektorräumen.

Definition: Ein EUKLIDischer Raum ist gegeben durch eine Menge E zusammen mit einem EUKLIDischen Vektorraum V derart, daß (E, V) ein affiner Raum ist. Der Abstand zwischen zwei Punkten $P, Q \in E$ ist definiert als die Länge ihres Verbindungsvektors $\overrightarrow{PQ}$, der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden als der Winkel zwischen zwei (beliebigen von $\vec{0}$ verschiedenen) Vektoren auf diesen Geraden.

In EUKLIDischen Räumen lassen sich daher alle geometrischen Konstruktionen durchführen, die aus der EUKLIDischen Geometrie von der Schule her bekannt sind; lediglich Orientierungen können nicht behandelt werden, da wir Winkel nur modulo 180° definiert haben.

Insbesondere können nun auch nichtlineare geometrische Objekte beschrieben werden, beispielsweise der Kreis als geometrischer Ort aller Punkte, deren Abstand von einem festen Punkt gleich einer konstanten Länge r ist. In diesem Abschnitt wollen wir speziell solche nichtlineare Objekte betrachten, allerdings nur die allereinfachsten, die – wie der Kreis in der EUKLIDischen Ebene – durch eine quadratische Gleichung beschreibbar sind.

Definition: Unter einer Quadrik im $\mathbb{R}^n$ verstehen wir die Menge aller Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$, die einer quadratischen Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j + \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = c$$

genügen mit $a_{ij}, b_k, c \in \mathbb{R}$.

Nachdem wir uns nun schon fast ein ganzes Semester lang mit linearer Algebra beschäftigen, ist hoffentlich jedermann klar, daß diese Definition geradezu schreit nach einer Umformulierung mit Vektoren und Matrizen: Mit der Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und den Vektoren

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{k=1}^{n} b_kx_k = {}^t\vec{x}A\vec{x} + \vec{b}\cdot\vec{x}\,,$$

wobei wir auch hier wieder Vektoren mit $1 \times n$-Matrizen identifizieren und $\cdot$ für das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ steht. Die Gleichung der Quadrik läßt sich also auch kurz in der Form

$${}^t\vec{x}A\vec{x} + \vec{b}\cdot\vec{x} = c$$

screiben.

Durch diese kompaktere Schreibweise hat sich natürlich noch nichts wirklich geändert; die Vereinfachung kommt erst, wenn wir uns klarmachen, daß wir hier *Geometrie* betreiben und daß es für einen geometrischen Sachverhalt völlig irrelevant ist, ob und gegebenenfalls wo wir Koordinatenachsen ins Bild zeichnen.

Bevor wir ein günstiges Koordinatensystems wählen, sollten wir uns zuerst überlegen, welche Freiheiten wir haben, um die Gleichung der Quadrik zu vereinfachen.

Wegen der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ ist

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i = (a_{ij} + a_{ji})x_ix_j\,;$$

wir können daher nach Belieben einen der beiden Koeffizienten um einen gewissen Betrag vergrößern und den anderen entsprechend verkleinern, ohne daß sich an der Gesamtsumme etwas ändert.

Eine denkbare Strategie wäre, einen der beiden Koeffizienten auf Null zu bringen; auf diese Weise könnten wir erreichen, daß A zu einer Dreiecksmatrix wird. Das wäre sicherlich eine Vereinfachung, allerdings wissen wir nur wenig über die Eigen*vektoren* einer Dreiecksmatrix.

Eine bessere Alternative besteht darin, daß wir sowohl a_{ij} als auch a_{ji} durch den gemeinsamen Mittelwert $\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji})$ ersetzen; dadurch wird A zu einer symmetrischen Matrix, und über symmetrische Matrizen wissen wir aus dem vorigen Paragraphen ziemlich viel. Insbesondere wissen wir, daß der $\mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von A hat. Die Richtungen dieser Vektoren bezeichnen wir als die *Hauptachsen* der Quadrik, und die Transformation der Quadrik in das entsprechende Koordinatensystems als *Hauptachsentransformation.*

In dieser Basis ausgedrückt wird A zu einer Diagonalmatrix, und der quadratische Teil der Gleichung vereinfacht sich zu

$${}^t\vec{x}A\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2\,.$$

Wir können noch weiter vereinfachen. Dazu betrachten wir zunächst den zwar völlig uninteressanten, dafür aber sehr einfachen Fall $n = 1$. Hier ist die allgemeinste Quadrikgleichung

$$ax^2 + bx = c\,.$$

Die klassische (über drei Tausend Jahre alte) Lösungsmethode für quadratische Gleichungen durch quadratischen Ergänzung besteht darin, im Falle $a \neq 0$ diese Gleichung in der Form

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = c + \frac{b^2}{4a}$$

oder kurz

$$\alpha y^2 = \gamma$$

zu schreiben mit der neuen Variablen $y = x + b/2a$, wobei wir die ganze Gleichung durch ein von Null verschiedenes γ dividieren können, so daß wir noch zusätzlich annehmen können, daß $\gamma = 0$ oder 1 ist.

Dieser neuen Form sieht man sofort die Lösungsmenge der Gleichung an: Für $\gamma = 1$ und positives α gibt es zwei verschiedene Lösungen, während es für negatives α (und auch den hier ausgeschlossenen Fall $\alpha = 0$) keine gibt.

Für $\gamma = 0$ gibt es im Falle $\alpha \neq 0$ die zweifache Nullstelle null, und für $\alpha = 0$ ist jede reelle Zahl Lösung der dann zu $0 = 0$ degenerierten Gleichung.

Genauso können wir die Methode der quadratischen Ergänzung auch auf die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = c$$

anwenden: Für jedes i, für das a_{ii} nicht verschwindet, können wir durch quadratische Ergänzung oder – geometrisch ausgedrückt – Verschiebung des Nullpunkts mittels der Transformation $x_i \mapsto x_i + b_i/2a_{ii}$ erreichen, daß $b_i = 0$ wird. (Der Einfachheit halber bezeichnen wir die neuen Variablen genau wie die alten wieder mit x_i.)

Weiter ändert sich nichts an der Lösungsmenge einer Gleichung, wenn wir die gesamte Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren; daher können wir erreichen, daß c, sofern es nicht verschwindet, zu eins wird. Wir können also für das folgende davon ausgehen, daß $c = 0$ oder 1 ist.

Schließlich ist noch die Reihenfolge, in der wir die n Koordinatenachsen benennen, unserer Willkür überlassen; wir legen sie so fest, daß die ersten a_{ii} positiv sind, dann die negativen kommen und zum Schluß die Nullen. Es gibt dann also Zahlen $0 \leq s \leq r \leq n$, so daß a_{ii} für $1 \leq i \leq s$ positiv ist, für $s < i \leq r$ negativ und für $i > r$ Null. Insbesondere ist also $b_i = 0$ fïr $i \leq r$. Wir setzen $\lambda_i \underset{\text{def}}{=} |a_{ii}|$ und schreiben die Gleichung in der Form

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_i^2 - \sum_{j=s+1}^{r} \lambda_j x_j^2 + \sum_{k=s+1}^{n} b_i x_i = c$$

mit $c = 0$ oder 1.

Die hier auftretenden Zahlen r und s sind wichtige Kenngrößen der Quadrik: Wir bezeichnen r als den *Rang* der Quadrik und das Paar $(s, r-s)$ als *Signatur.*

Falls $c = 0$ ist, können wir die gesamte Gleichung mit -1 multiplizieren um aus der Signatur $(s, r-s)$ die Signatur $(r-s, s)$ zu machen; in diesem Fall können wir daher noch zusätzlich fordern, daß $s \geq r - s$ sein soll.

Als letzte Vereinfachung können wir schließlich im Fall $r < n$, falls es mindestens ein $b_i \neq 0$ gibt, stets $c = 0$ erreichen, indem wir für $c = 1$ die Variable x_i durch $x_i + 1/b_i$ ersetzen.

Nachdem wir die Gleichung nun genügend vereinfacht haben, wollen wir in den Dimensionen zwei und drei genauer untersuchen, welche Möglichkeiten es gibt.

1) Quadriken im $\mathbb{R}^2$***:*** Hier bezeichnen wir die Koordinaten wie üblich mit x und y anstelle von x_1 und x_2. Die positiven reellen Zahlen λ_1 und λ_2, sofern sie auftreten, können wir als Quadrate reeller Zahlen schreiben; um nachher bekannt aussehende Gleichungen zu bekommen, schreiben wir sie als *Kehrwerte* von Quadraten:

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2}\,.$$

Der Rang einer Quadrik kann höchstens gleich der Dimension des zugrundeliegenden Raums sein, also ist $r \leq 2$.

Beginnen wir mit dem Fall $r = 2$. Dazu gibt es die drei Unterfälle $s = 0$, $s = 1$ und $s = 2$.

Für $s = 2$ haben wir, je nachdem, ob $c = 0$ oder $c = 1$ ist, die beiden Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Die erste Gleichung hat nur die eine Lösung $x = y = 0$, die Quadrik ist also zu einem Punkt degeneriert, und im zweiten Fall haben wir die in Abbildung 9 dargestellte *Ellipse* mit Halbachsen a und b.

Nächster Fall ist $s = 1$; hier haben wir die beiden Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

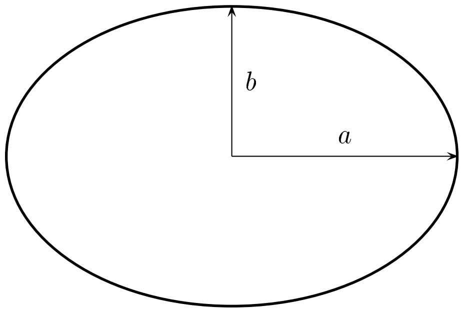

Abb. 9: Ellipse mit Halbachsen a und b

Wegen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$$

besteht die erste Quadrik aus den beiden Geraden

$$y = \pm\frac{b}{a}x\,,$$

die sich im Nullpunkt schneiden; die zweite ist die in Abbildung 10 zu sehende *Hyperbel*. Der Parameter a ist der Achsenabschnitte auf der x-Achse, und die (gestrichelt eingezeichneten) Geraden $y = \pm\frac{b}{a}x$ sind die Asymptoten.

Als letzter Fall einer Quadrik mir Rang 2 bleibt $s = 0$; hier haben alle Quadrate negatives Vorzeichen. Da hier $s < r - s$ ist, liefert dieser Fall nur für $c = 1$ etwas neues, und auch da beschreibt

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nur die leere Menge.

Gehen wir also weiter zu Rang 1; hier gibt es die Unterfälle $s = 1$ und $s = 0$.

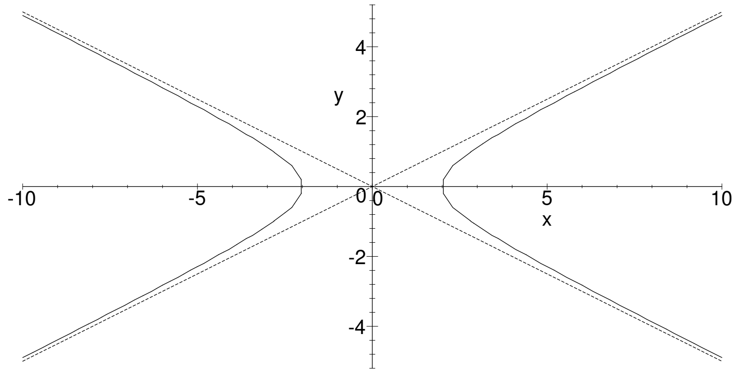

Abb. 10: Hyperbel $x^2/4 - y^2 = 1$ mit Asymptoten

Für $s = 1$ gibt es die Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + by = 0\,.$$

Erstere definiert die beiden parallelen Geraden $x = \pm a$, letztere die *Parabel* $y = \frac{-1}{a^2b}x^2$ aus Abbildung 11.

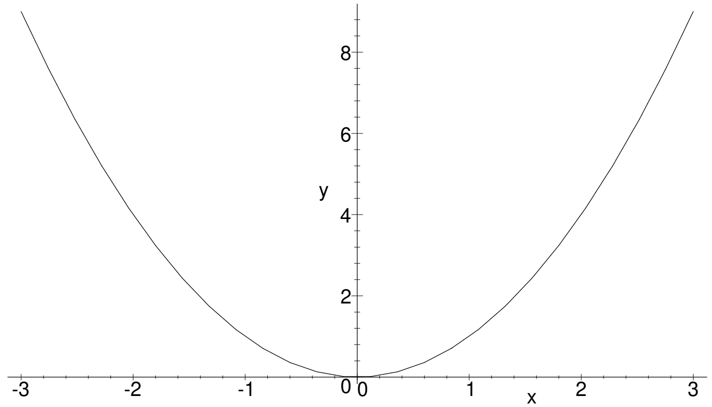

Abb. 11: Die Parabel $y = x^2$

$s = 0$ liefert, da $s < r - s$ ist, nur für $c = 1$ etwas neues, und auch das nur, wenn keine linearen Terme auftreten, da wir sonst sofort auf $c = 0$ reduzieren können. Was bleibt ist also die Gleichung

$$-\frac{x^2}{a^2} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 = -a^2,$$

die wieder einmal die leere Menge definiert.

Damit kommen wir zum Rang Null, d.h. zu den „Quadriken", in deren Gleichung kein quadratischer Term auftritt. Die allgemeinste Gleichung ist

$$ax + by = c,$$

d.h. also die allgemeine Geradengleichung, die in Spezialfällen auch wieder die leere Menge (setze $a = b = 0$ und $c = 1$) oder auch die gesamte Ebene (für $a = b = c = 0$) als Lösung haben kann.

2) Quadriken im $\mathbb{R}^3$: Hier gibt es naturgemäß schon mehr Möglichkeiten. Wir bezeichnen die drei Variablen mit x, y, z und setzen in Analogie zum zweidimensionalen Fall

$$\lambda_1 = \frac{1}{a^2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{b^2} \quad \text{und} \quad \lambda_3 = \frac{1}{c^2}.$$

Auch hier beginnen wir wieder mit dem größtmöglichen Rang $r = 3$.

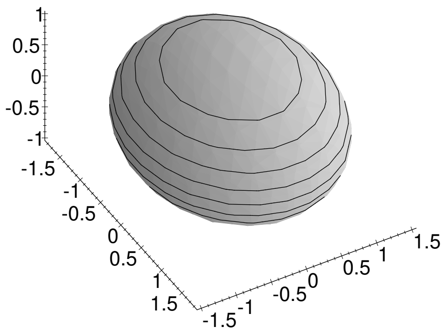

Abb. 12: Das Ellipsoid $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$

Falls auch $s = 3$ den größtmöglichen Wert hat, bekommen wir die beiden Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

deren erste wieder nur einen Punkt als Lösung hat. Die zweite Gleichung, deren Nullstellenmenge in Abbildung 12 zu sehen ist, verallgemeinert offensichtlich die Ellipsengleichung aus dem $\mathbb{R}^2$; man spricht daher hier von einem *Ellipsoid.*

Für $s = 2$ sind die entsprechenden Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Die erste dieser Gleichungen können wir auch als

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{z}{c}\right)^2$$

schreiben, und aus dieser Form sehen wir, daß die Lösungsmenge für konstantes z eine Ellipse ist, deren Halbachsen linear mit z ansteigen; wir haben also einen (elliptischen) *Kegel* mit Spitze im Nullpunkt. Abbildung 13 zeigt, was Maple daraus macht; man sollte also Computern trotz deren unbestreitbarer Nützlichkeit nicht zu sehr vertrauen.

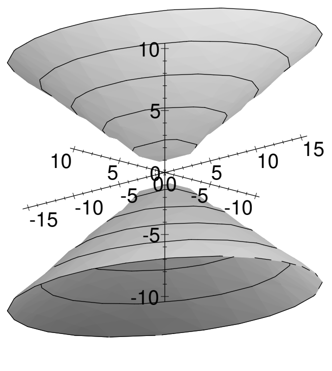

Abb. 13: Der Kegel $x^2 + y^2 = z^2$

Die zweite Gleichung hat für konstantes x oder y Hyperbeln als Schnittkurven und für konstantes z Ellipsen; man bezeichnet die in Abbildung 14 dargestellte zugehörige Quadrik als *einschaliges Hyperboloid.*

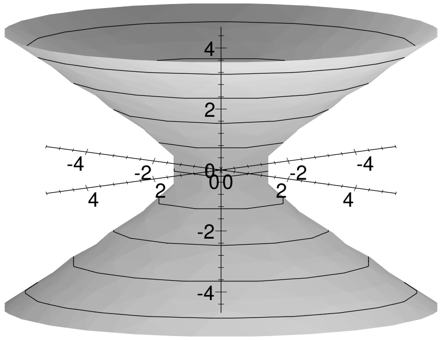

Abb. 14: Das einschalige Hyberboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Der Zusatz „einschaliges“ wird klar, wenn wir den nächsten Fall $s = 1$ betrachten; da hier $s < r - s$ ist, interessiert nur die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit $c = 1$. Sie hat für konstantes y oder z Hyperbeln als Schnittkurven und für konstantes x entweder die leere Menge oder eine Ellipse. Da die Schnittmenge für betragskleine x leer ist, zerfällt die Quadrik in zwei Teile; sie heißt deshalb *zweischaliges Hyperboloid* und ist in Abbildung 15 zu sehen.

Für $s = 0$ und konstanten Term eins definiert

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

natürlich wieder die leere Menge.

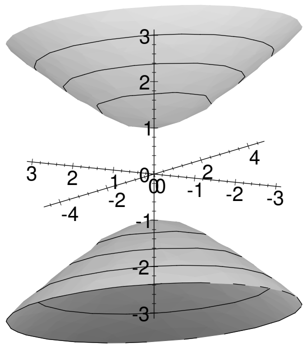

Abb. 15: Das zweischalige Hyberboloid $x^2 - y^2/2 - z^2 = 1$

Damit kommen wir zum Rang zwei. Für den maximal möglichen Wert $s = 2$ haben wir die beiden Normalformen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \beta z = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,$$

denn $c = 1$ ist nur möglich, wenn kein linearer Term auftritt.

Bei der ersten Gleichung müssen wir unterscheiden, ob β verschwindet oder nicht. Für $\beta \neq 0$ erhalten wir eine Quadrik, deren Schnittkurven für konstantes z Ellipsen sind und für konstantes x oder y Parabeln. Man spricht daher von einem *elliptischen Paraboloid;* es ist in Abbildung 16 dargestellt.

Für $\beta = 0$ gibt es nur die Lösung $x = y = 0$, die Gleichung ist also eine komplizierte Darstellung der z-Achse des Koordinatensystems, d.h wir haben eine (doppelt zu zählende) Gerade.

Die zweite Gleichung ist identisch mit der Ellipsengleichung aus dem $\mathbb{R}^2$, allerdings gibt es nun im $\mathbb{R}^3$ noch eine dritte Koordinate, die in der Gleichung nicht vorkommt und die somit beliebig gewählt werden kann; die Quadrik ist also ein Zylinder mit elliptischer Grundlinie, d.h. ein *elliptischer Zylinder.*