Nach der Dimensionsformel aus §5*f*) ist

$$\dim \operatorname{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell = \dim V - \dim \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell ,$$

also ist

$$\dim \operatorname{Kern}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell + \dim \operatorname{Bild}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell = \dim V ,$$

die beiden Untervektorräume erzeugen also ganz V. ■

Die Zerlegung von V nach diesem Lemma heißt FITTING-Zerlegung.

Der deutsche Mathematiker HANS FITTING (1906–1938) beschäftigte sich vor allem mit der Untersuchung von Operatoren (und Operatorenringen). Trotz seines frühen Todes konnte er damit wesentliche Beiträge zur Algebra leisten, vor allem auch zur Erforschung der Struktur von Gruppen.

Das Schöne an der FITTING-Zerlegung ist, daß sie rekursiv fortgesetzt werden kann: Da $\operatorname{Bild}(\varphi-\lambda\,\mathrm{id})^\ell$ auch φ-invariant ist, können wir für die Einschränkung von φ auf diesen Unterraum einen Hauptraum zu einem anderen Eigenwert abspalten *usw.* Bevor wir uns das genauer überlegen, wollen wir uns aber zunächst eine gute Basis für den Hauptraum H_λ verschaffen.

Lemma: Der Hauptraum H_λ hat eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine obere Dreiecksmatrix ist. Alle Hauptdiagonaleinträge dieser Matrix sind gleich λ.

Beweis: Wir beginnen mit einer Basis $\{\vec b_1, \dots, \vec b_{r_1}\}$ des Eigenraums zu λ und ergänzen diese zu einer Basis $\{\vec b_1, \dots, \vec b_{r_2}\}$ des Raums aller Hauptvektoren der Stufe höchstens zwei und so weiter, bis eine Basis $\{\vec b_1, \dots, \vec b_r\}$ des gesamten Hauptraums erreicht ist.

Der Vektor $\vec b_i$ sei Hauptvektor der Stufe ℓ; dann ist

$$\begin{aligned}(\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^\ell(\vec b_i) &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id})(\vec b_i)\big)\\ &= (\varphi - \lambda\,\mathrm{id})^{\ell-1}\big(\varphi(\vec b_i) - \lambda\vec b_i\big) = \vec 0 ,\end{aligned}$$

$\varphi(\vec b_i) - \lambda\vec b_i$ ist also ein Hauptvektor der Stufe höchstens $\ell - 1$. Nach Konstruktion der Basis ist $\varphi(\vec b_i) - \lambda\vec b_i$ daher eine Linearkombination

von Basisvektoren $\vec b_j$ mit Indizes echt kleiner i, d.h.

$$\varphi(\vec b_i) = \lambda\vec b_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}\vec b_j .$$

Bezüglich der Basis $\{\vec b_1, \dots, \vec b_r\}$ hat die Abbildungsmatrix daher in der Tat die gewünschte Form. ■

Abspaltung immer weiterer Haupträume auch vom invarianten Komplement führt schließlich zum

Satz: Zu einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ eines endlichdimensionalen k-Vektorraums V gibt es genau dann eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ eine Dreiecksmatrix ist, wenn das charakteristische Polynom von φ über k als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann. Alsdann kann die Basis so gewählt werden, daß die Abbildungsmatrix die Form

$$\begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{A_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{A_s} \end{pmatrix}$$

hat mit Dreiecksmatrizen A_i, die auf der Hauptdiagonalen den i-ten Eigenwert λ_i stehen haben.

Beweis: Falls es zu φ eine Basis gibt, bezüglich derer die Abbildungsmatrix A von φ eine Dreiecksmatrix ist, ist bezüglich dieser Basis auch $A-\lambda E$ eine Dreiecksmatrix; das charakteristische Polynom $\det(A-\lambda E)$ ist also nach einem der Lemmata aus Abschnitt *g)* gerade das Produkt der Diagonalelemente und damit ein Produkt von Linearfaktoren.

Falls umgekehrt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren zerfällt, gibt es auf jeden Fall Eigenwerte; λ_1 sei einer davon, und H_1 sei der zugehörige Hauptraum. Dazu gibt es nach dem gerade bewiesenen

Lemma eine Basis, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von $\varphi_{|H_{\lambda_1}}$ eine obere Dreiecksmatrix ist, deren sämtliche Hauptdiagonaleinträge gleich λ_1 sind.

Nach dem Lemma von der FITTING-Zerlegung gibt es zu H_{λ_1} ein φ-invariantes Komplement V_1, so daß $V = H_{\lambda_1} \oplus V_1$ ist. Wir ergänzen die Basis von H_{λ_1} durch eine Basis von V_1 zu einer Basis von V; bezüglich dieser Basis hat φ dann eine Abbildungsmatrix der Form

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{B_1} \end{pmatrix}$$

mit einer oberen Dreiecksmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{pmatrix} .$$

Entwicklung des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E)$ nach der ersten Spalte, gefolgt von der Entwicklung des Rests nach seiner ersten Spalte und so weiter, bis die ersten $r_1 = \dim H_{\lambda_1}$ Spalten aufgebraucht sind, zeigt, daß

$$\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdot \det(B_1 - \lambda E)$$

ist, das charakteristische Polynom von $\varphi_{|V_1}$ ist also ein Teiler des charakteristischen Polynoms von φ und zerfällt somit auch in Linearfaktoren.

Insbesondere hat es (mindestens) eine Nullstelle λ_2; wir können deren Hauptraum H_{λ_2} in V_1 betrachten und damit V_1 genau wie oben weiter zerlegen in H_{λ_2} und dessen invariantes Komplement V_2. Nimmt man nun als Basisvektoren von V zunächst die Basisvektoren von H_{λ_1} wie oben, dann entsprechende Basisvektoren für H_{λ_2} und schließlich noch solche für V_2, hat die Abbildungsmatrix A_2 bezüglich dieser neuen Basis

die Form

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boxed{B_2} \end{pmatrix}$$

mit einer neuen Dreiecksmatrix

$$D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{pmatrix} .$$

Auf diese Weise lassen sich sukzessive immer weitere Haupträume abspalten, bis schließlich eine Basis erreicht ist, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{D_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{D_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{D_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von φ. Ist D_i eine $r_i \times r_i$-Matrix, so ist das charakteristische Polynom von φ

$$\det(A - \lambda E) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \cdots (\lambda_1 - \lambda)^{r_s} ,$$

die r_i sind also gerade die algebraischen Vielfachheiten der λ_i. ■

Für spätere Anwendungen wollen wir das gerade bewiesene Ergebnis noch etwas umformulieren:

Satz: Falls das charakteristische Polynom von $\varphi: V \to V$ in Linearfaktoren zerfällt, gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix A von φ als $A = D + N$ geschrieben werden kann, wobei D eine Diagonalmatrix ist und N eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen. Außerdem ist $DN = ND$.

Beweis: Wir nehmen natürlich die Basis aus dem gerade beendeten Beweis; die Diagonalmatrix D soll genau aus den Diagonalelementen der Abbildungsmatrix A bestehen, also die Eigenwerte entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheiten als Diagonalelemente enthalten, und $N = A - D$. Für jede einzelne Dreiecksmatrix D_i aus dem obigen Beweis kommutiert der Diagonalanteil mit dem Rest, da der Diagonalanteil gerade das λ_i-fache der Einheitsmatrix ist. Damit ist auch $DN = ND$, denn bei beiden Multiplikationen treffen, abgesehen von den Nullen, immer nur Einträge aus einem D_i aufeinander. ■

Diese Zerlegung aus diesem Satz bezeichnet man nach dem französischen Mathematiker CAMILLE JORDAN als JORDAN-Zerlegung.

MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838–1922) arbeitete bei der Herleitung dieser und weiterer Zerlegungen nicht mit komplexen Matrizen, sondern mit Matrizen über endlichen Körpern, motiviert durch Fragen aus der Gruppentheorie und Lösbarkeitsfragen für nichtlineare Gleichungen. Weitere Arbeiten beschäftigen sich mit der Anwendung gruppentheoretischer Methoden auf die Geometrie sowie mit der Topologie, wo er z.B. bewies, daß jede doppeltpunktfreie geschlossene Kurve die Ebene in zwei Gebiete zerlegt. Außerdem entwickelte er neue Methoden zum Nachweis der Konvergenz von FOURIER-Reihen.

Die JORDAN-Zerlegung ist beispielsweise nützlich zur Berechnung von Potenzen einer Matrix: Da D und N miteinander kommutieren, gilt für Potenzen der Summe $D + N$ der „übliche“ binomische Lehrsatz, d.h.

$$(D+N)^m = \sum_{\ell=1}^{m} \binom{m}{\ell} D^{m-\ell} N^\ell .$$

Die Potenzen von D sind sehr einfach zu berechnen: D^j ist wieder eine Diagonalmatrix, ihre Diagonalelemente sind die j-ten Potenzen der Diagonalelemente von D.

N ist eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen, die lineare Abbildung ψ zu N bildet also den i-ten Basisvektor ab in den von Basisvektoren $\vec{b}_j$ mit $j \leq i - 1$ erzeugten Unterraum. Für diese Basisvektoren gilt das gleiche, $\psi^{(2)}(\vec{b}_i)$ liegt daher im Unterraum, den die $\vec{b}_j$ mit $j \leq i - 2$ aufspannen. Induktiv folgt, daß $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i)$ im von den $\vec{b}_j$ mit $j \leq i - \ell$ aufgespannten Untervektorraum liegt; falls $i - \ell$ negativ wird, ist das natürlich der Nullraum.

Die Abbildungsmatrix N^ℓ von $\psi^{(\ell)}$ ist daher ebenfalls eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen; zusätzlich stehen auch noch in den $\ell - 1$ schrägen Reihen oberhalb und parallel zur Hauptdiagonale lauter Nullen, und spätestens wenn ℓ größer oder gleich der Dimension wird, ist N^ℓ gleich der Nullmatrix. (Tatsächlich überlegt man sich leicht, daß N^ℓ bereits verschwindet, sobald ℓ größer oder gleich der größten Stufe eines Hauptvektors von φ wird.) Auch die Potenzen von N sind also relativ einfach zu bestimmen, und vor allem stehen in der obigen Entwicklung auch für große Werte von m nur verhältnismäßig wenige von Null verschiedene Summanden.

Als Beispiel betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die offensichtlich von der oben betrachteten Form ist; hier ist

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine kurze Rechung zeigt, daß

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N^3 = 0$$

ist, also ist beispielsweise

$$A^{10} = D^{10} + 10\,D^9 N + 55\,D^8 N^2 = \begin{pmatrix} 1024 & 5120 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1024 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 20 & 390 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da die JORDAN-Zerlegung später bei der Lösung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten eine wesentliche Rolle spielen wird, sei zur Vorsicht noch einmal darauf hingewiesen, daß es für die obige Rechnung sehr wesentlich war, daß D und N miteinander kommutieren; es reicht nicht, wenn wir die Matrix A nur auf irgendeine Dreiecksgestalt bringen und dann als Summe einer Diagonalmatrix und einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen schreiben. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D + N$$

beispielsweise ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

und in der Tat ist

$$D^2 + 2DN + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

verschieden von

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Der Grund für die Verschiedenheit der Ergebnisse liegt natürlich darin, daß wir im allgemeinen nur sagen können, daß

$$(D+N)^2 = D(D+N) + N(D+N) = D^2 + DN + ND + N^2$$

ist, aber wir können $DN + ND$ nicht zusammenfassen zu $2DN$. Mit wachsendem Exponenten verschlimmert sich die Situation drastisch; schon

$$(D+N)^3 = D^3 + D^2N + DND + ND^2 + DN^2 + NDN + N^2D + N^3$$

hat acht Summanden; die m-te Potenz hat 2^m, und von denen überleben viele auch dann, wenn N^r schon für relativ kleine r verschwindet.

k) Ergänzung: Die Jordan-Normalform

Die im vorigen Abschnitt konstruierte Normalform für Abbildungsmatrizen wird für alle Zwecke dieser Vorlesung ausreichen. Trotzdem ist sie nicht ganz befriedigend, da die Dreiecksmatrizen immer noch sehr willkürlich und damit komplizierter als notwendig sind. Für Interessenten sei in diesem Abschnitt gezeigt, wie sich die bislang erreichte Dreiecksgestalt noch weiter vereinfachen läßt. Für das folgende werden wir die Ergebnisse dieses Abschnitts nicht benötigen; er kann also auch gefahrlos überlesen werden.

Die Potenzen einer oberen Dreiecksmatrix mit Nullen in der Hauptdiagonalen verschwinden, wie wir gesehen haben, ab einem meist überschaubar kleinen Exponenten, aber die Potenzen bis dahin muß man doch mühsam von Hand ausrechnen. Eine Ausnahme, bei der alles klar ist, bilden Matrizen der Form

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

bei denen direkt oberhalb der Hauptdiagonale lauter Einsen stehen, während alle anderen Einträge verschwinden, d.h.

$$N = (n_{ij}) \quad \text{mit} \quad n_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j - i = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Bei der sukzessiven Potenzierung von N verschiebt sich einfach die Reihe von Einsen jeweils um eins weiter nach außen, d.h.

$$N^\ell = (n_{ij}^{(\ell)}) \quad \text{mit} \quad n_{ij}^{(\ell)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j-i=\ell \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

denn die zu N gehörige lineare Abbildung ψ bildet einfach den i-ten Basisvektor auf den $(i-1)$-ten ab oder auf den Nullvektor, falls es keinen $(i-1)$-ten Basisvektor mehr gibt, und entsprechend ist $\psi^{(\ell)}(\vec{b}_i) = \vec{b}_{i-\ell}$ beziehungsweise $\vec{0}$.

In diesem speziellen Fall sind die Potenzen von N also ohne jeden Aufwand zu berechnen, und tatsächlich genügen solche Matrizen N schon vollständig für eine Normalform der Abbildungsmatrix, die sogenannte JORDAN-Normalform:

Satz: Falls das charakteristische Polynom von $\varphi\colon V \to V$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, gibt es eine Basis von V, bezüglich derer die Abbildungsmatrix von φ die Form

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boxed{J_2} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \boxed{J_s} \end{pmatrix}$$

hat mit oberen Dreiecksmatrizen

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

zu den Eigenwerten von φ. Die Anzahl der Kästchen J_i zu einem festen Eigenwert ist die geometrische Vielfachheit dieses Eigenwerts, die Summe ihrer Zeilenzahlen die algebraische.

Beweis: Wir gehen aus von der Zerlegung von V in die Haupträume zu den Eigenwerten von φ und betrachten einen festen Hauptraum H_λ. Die Einschränkung von φ auf diesen Untervektorraum läßt sich zerlegen in eine Summe

$$\varphi_{|H_\lambda} = \lambda\,\mathrm{id} + \psi\,;$$

dabei ist die Abbildungsmatrix von $\lambda\,\mathrm{id}$ bezüglich jeder beliebigen Basis gleich dem λ-fachen der Einheitsmatrix, und zumindest bezüglich der im vorigen Abschnitt konstruierten Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r\}$ ist die Abbildungsmatrix von ψ eine obere Dreiecksmatrix N mit Nullen in der Hauptdiagonalen.

ψ bildet den Basisvektor $\vec{b}_i$ daher ab in das Erzeugnis der Basisvektoren $\vec{b}_1$ bis $\vec{b}_{i-1}$; insbesondere geht $\vec{b}_1$ auf den Nullvektor. Wiederholte Anwendung von ψ zeigt, daß für jeden Basisvektor $\vec{b}_i$ gilt: $\psi^{(i-1)}(\vec{b}_i) = \vec{0}$, wobei der Exponent von ψ für die wiederholte Anwendung der Abbildung stehen soll. Insbesondere ist also $\psi^{(r)}(\vec{v}) = \vec{0}$ für alle $\vec{v} \in H_\lambda$. Es könnte sein, daß es schon eine kleinere Zahl s gibt, so daß $\psi^{(s)}$ die Nullabbildung ist; die kleinste solche Zahl bezeichnen wir als den *Nilpotenzgrad* von ψ.

Hat der Nilpotenzgrad seinen größtmöglichen Wert r, so sind die Vektoren

$$\vec{b}_r,\ \psi(\vec{b}_r),\ \dots,\ \psi^{(s-1)}(\vec{b}_r)$$

allesamt ungleich dem Nullvektor. Sie sind auch linear unabhängig, denn ist

$$\alpha_0\vec{b}_r + \alpha_1\psi(\vec{b}_r) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r) = \vec{0}\,,$$

so ist auch für jedes j

$$\begin{aligned} &\psi^{(j)}\bigl(\alpha_0\vec{b}_s + \alpha_1\psi(\vec{b}_s) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)\bigr) \\ &= \alpha_0\psi^{(j)}(\vec{b}_r) + \alpha_1\psi^{(j+1)}(\vec{b}_r) + \cdots + \alpha_{r-1}\psi^{(j+r-1)}(\vec{b}_r)\bigr) = \vec{0}\,. \end{aligned}$$

Da $\psi^{(s)}$ für $s \geq r$ die Nullabbildung ist, treten hier nur die Summanden $\alpha_i\psi^{(i+j)}(\vec{b}_s)$ mit $i < r-j$ wirklich auf, für $j = r-1$ also nur der Summand $\alpha_0\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)$. Da $\psi^{(r-1)}(\vec{b}_r)$ ungleich dem Nullvektor ist, muß also $\alpha_0 = 0$ sein. Anwendung von $\psi^{(r-2)}$ zeigt als nächstes, daß

$\alpha_1 = 0$ ist, und genauso zeigt man sukzessive das Verschwinden aller α_i. Also können wir

$$\vec{c}_1 = \psi^{(r-1)}(\vec{b}_r), \quad \vec{c}_2 = \psi^{(r-2)}(\vec{b}_r), \quad \dots, \quad \vec{c}_r = \vec{b}_r$$

als Basisvektoren von H_λ wählen, und bezüglich dieser Basis ist

$$\psi(\vec{c}_i) = \begin{cases} c_{i-1} & \text{für } i > 1 \\ \vec{0} & \text{für } i = 1 \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi(\vec{c}_i) = \begin{cases} \lambda\vec{c}_i + \vec{c}_{i-1} & \text{für } i > 1 \\ \lambda\vec{c}_1 & \text{für } i = 1 \end{cases}.$$

Die Abbildungsmatrix von φ hat somit die einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

und das ist gerade eines der JORDAN-Kästchen aus der Formulierung des Satzes.

Falls der Nilpotenzgrad s von ψ kleiner als r ist, können wir nicht so argumentieren. Wir können aber immerhin einen Vektor $\vec{v} \in H_\lambda$ finden, so daß $\psi^{(s-1)}(\vec{v}) \neq \vec{0}$ ist, denn erst $\psi^{(s)}$ ist die Nullabbildung. Genau wie oben folgt, daß

$$\vec{c}_1 = \psi^{(s-1)}(\vec{v}), \quad \vec{c}_2 = \psi^{(s-2)}(\vec{v}), \quad \dots, \quad \vec{c}_s = \vec{v}$$

linear unabhängig sind, allerdings spannen sie nur einen s-dimensionalen Teilraum U von H_λ auf. Dieser Teilraum ist ψ-invariant und damit auch φ-invariant, denn ψ bildet einfach die Basisvektoren aufeinander beziehungsweise auf den Nullvektor ab, und die Abbildungsmatrizen bezüglich dieser Basis sehen genauso aus wie oben; auch zu U gehört also ein JORDAN-Kästchen.

Um weitere Kästchen zu bekommen, brauchen wir ein invariantes Komplement von U in H_λ. Dazu wählen wir irgendeine lineare Abbildung $\omega: V \to k$, für die $\omega(\vec{v}) \neq 0$ ist und setzen

$$W = \left\{\vec{w} \in H_\lambda \;\middle|\; \omega(\vec{w}) = \omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s-1)}(\vec{w})\big) = 0i\right\}.$$

Der Durchschnitt $U \cap W$ besteht nur aus dem Nullvektor, denn jeder Vektor aus U läßt sich als

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{c}_1 + \dots + \alpha_s\vec{c}_s$$

schreiben, und wenn $\vec{w}$ auch in W liegt, ist

$$\omega\big(\psi^{(j)}(\vec{w})\big) = \alpha_1\psi^{(j+s-1)}(\vec{v}) + \dots + \alpha_{s-1}\psi^{j+1}(\vec{v}) + \alpha_s\psi^{(j)}(\vec{v}) = 0$$

für $j = 0, \dots, s-1$. Da $\psi^{(\ell)}(\vec{v})$ für $\ell \geq s$ gleich dem Nullvektor ist, folgt für $j = s-1$, daß $\alpha_{s-1} = 0$ ist, und erniedrigt man j immer weiter, folgt nacheinander das Verschwinden aller Koeffizienten α_i. Somit ist $U \cap W$ in der Tat der Nullraum.

Die Dimension von W läßt sich zumindest nach unten leicht abschätzen: Bezüglich einer Basis von H_λ wird jede Gleichung $\omega\big(\psi^{(j)}(\vec{w})\big) = 0$ zu einer linearen Gleichung in den Koeffizienten von $\vec{w}$, der Untervektorraum W ist also die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems aus s Gleichungen in $\dim H_\lambda$ Variablen. Daher ist

$$\dim W \geq \dim H_\lambda - s \quad \text{und} \quad \dim U \oplus W = \dim U + \dim W \geq \dim H_\lambda .$$

Da $U \oplus W$ Untervektorraum von H_λ ist, geht das nur, wenn das Gleichheitszeichen gilt, d.h. $H_\lambda = U \oplus W$.

Wir müssen uns noch überlegen, daß W unter ψ invariant ist. Dazu müssen wir zeigen, daß für alle $\vec{w} \in W$ gilt

$$\omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \omega\Big(\psi(\big(\psi(\vec{w})\big)\Big) = \cdots = \omega\Big(\psi^{(s-1)}\big((\vec{w})\big)\Big) = 0\,,$$

d.h.

$$\omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \omega\big(\psi^{(2)}(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s)}(\vec{w})\big) = 0$$

falls

$$\omega(\vec{w}) = \omega\big(\psi(\vec{w})\big) = \cdots = \omega\big(\psi^{(s-1)}(\vec{w})\big) = 0$$

ist. Die einzige neue Bedingung ist $\omega\big(\psi^{(s)}(\vec{w})\big) = 0$, und die ist trivialerweise erfüllt, da $\psi^{(s)}$ die Nullabbildung ist. Also ist W invariant unter ψ und somit ein invariantes Komplement von U.

Auch $\psi_{|W}$ ist eine nilpotente Abbildung von einem Nilpotenzgrad $s' \leq s$; wenn wir also einen Vektor $\vec{w} \in W$ hernehmen, für den

$\psi^{(s')}(\vec{w}) \neq \vec{0}$ ist, können wir die gleiche Kontruktion wie oben mit $\vec{v}$ noch einmal durchführen und erhalten einen neuen invarianten Unterraum $U' \leq W$ mit einer Basis, bezüglich derer φ ein JORDAN-Kästchen als Abbildungsmatrix hat.

Falls $U' = W$ ist, sind wir damit fertig; anderfalls können wir wieder wie oben ein invariantes Komplement W' von U' in W finden und einen weiteren Teilraum abspalten, *usw.* Jeder solche Teilraum führt auf ein JORDAN-Kästchen, und das Verfahren bricht schließlich ab, da wir in einem endlichdimensionalen Vektorraum arbeiten.

In jedem der konstruierten Teilräume liegt genau ein eindimensionaler Teilraum aus Eigenvektoren (und dem Nullvektor), nämlich der vom ersten Basisvektor aufgespannte. Der Eigenraum zu λ wird also von diesen ersten Basisvektoren aufgespannt und seine Dimension, die geometrische Vielfachheit von λ, ist damit gleich der Anzahl der JORDAN-Kästchen zu λ. Die algebraische Vielfachheit ist wegen der speziellen Gestalt der Abbildungsmatrix natürlich die Anzahl der λ in der Hauptdiagonalen, d.h. gleich der Summe der Zeilenzahlen der JORDAN-Kästchen zu λ. ■

Um wenigstens ein ganz einfaches Beispiel zu sehen, betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vom Ende des vorigen Abschnitts. Links oben steht schon ein JORDAN-Kästchen zum Eigenwert zwei, rechts unten müssen wir noch etwas arbeiten.

Die Basis des $\mathbb{R}^5$ sei $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_5\}$; davon können wir $\vec{b}_1 = \vec{e}_1$ und $\vec{b}_2 = \vec{e}_2$ als Basis von H_2 gleich übernehmen. H_1 wird von $\vec{e}_3, \vec{e}_4$ und $\vec{e}_5$ aufgespannt; ein Vektor aus diesem dreidimensionalen Raum, der unter

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den maximalen Nilpotenzgrad hat, ist etwa $\vec{e}_5$, denn $\vec{e}_5$ wird abgebildet auf $3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$; da e_3 auf den Nullvektor geht und $\vec{e}_4$ auf $2\vec{e}_3$, wird dieser Vektor weiter abgebildet auf $8\vec{e}_3$, was schließlich auf den Nullvektor abgebildet wird. Mit

$$\vec{b}_3 = 2\vec{e}_3, \quad \vec{b}_4 = 3\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4 \quad \text{und} \quad \vec{b}_5 = \vec{e}_5$$

geht also $\vec{b}_5$ unter N auf $\vec{b}_4$ und weiter auf $\vec{b}_3$; daher ist

$$A\vec{b}_3 = \vec{b}_3, \quad A\vec{b}_4 = \vec{b}_4 + \vec{b}_3 \quad \text{und} \quad A\vec{b}_5 = \vec{b}_5 + \vec{b}_4\,,$$

und die Matrix A hat bezüglich der Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_5\}$ die Gestalt

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit den beiden JORDAN-Kästchen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§7: Euklidische und Hermitesche Vektorräume

Viele wichtige reelle Matrizen in physikalisch-technischen Anwendungen sind symmetrisch. In diesem Paragraphen sollen deren besondere Eigenschaften untersucht werden; beispielsweise werden wir sehen, daß es zu einer symmetrischen Matrix stets eine Basis aus Eigenvektoren gibt und daß alle Eigenwerte reell sind.

Im Komplexen ist der Begriff der symmetrischen Matrix weniger nützlich; dort werden wir stattdessen eine Variante der Symmetrie betrachten, die sogenannte HERMITEsche Symmetrie.

Symmetrische und HERMITEsche Matrizen sind eng verbunden mit Skalarprodukten auf reellen und komplexen Vektorräumen; wir wollen deshalb mit diesen beginnen.