Wenn h und k simultan gegen null gehen, können wir kh^2 gegenüber kh vernachlässigen, der Flächeninhalt kh des Rechtecks aus der (r, φ)-Ebene wird also im wesentlichen nur mit r multipliziert – genau wie es die obige Rechnung auch zeigt.

Mit dieser Formel können wir beispielsweise noch einmal die Fläche eines Kreises ausrechnen: Die Punkte der Kreisscheibe B mit Radius R um den Nullpunkt haben Polarkoordinaten (r, φ) im Rechteck

$$B' = \{(r, \varphi) \mid 0 \le r \le R \quad \text{und} \quad 0 \le \varphi < 2\pi\} ;$$

die Fläche von B ist also

$$\iint_B dx\,dy = \iint_{B'} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r\,dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2}\,d\varphi = \pi R^2 .$$

Im Vergleich zum letzten Abschnitt, wo wir das Integral (für $R = 1$) in kartesischen Koordinaten ausrechneten und dazu die Funktion $\sqrt{1 - x^2}$ integrieren mußten, ist diese Rechnung erheblich einfacher; die Transformationsformel leistet also genau das, was wir von einer verallgemeinerten Substitutionsregel erwarten: Bei *geschickter,* an das Problem angepaßter Substitution kann sie die Berechnung eines Integrals erheblich vereinfachen.

Als nächstes Beispiel wollen wir endlich einmal ein Integral ausrechnen, bei dem wir das Ergebnis nicht besser und viel einfacher durch elementargeometrische Überlegungen bekommen können: das Integral

$$I \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx .$$

Man kann zeigen, daß die Stammfunktion von e^{-x^2} nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausdrückbar ist; Integration mittels Stammfunktion ist also zwecklos. Stattdessen benutzen wir folgenden Trick:

Nach dem Satz von FUBINI (*Kap. 2,* §1*b*)), den wir durch Grenzübergang

auch auf das unendliche „Rechteck“ $\mathbb{R}^2$ verallgemeinern können, ist

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cdot I\,dy \\ &= I \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = I^2 .\end{aligned}$$

In Polarkoordinaten entspricht $\mathbb{R}^2$ dem Bereich $B' = \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0, 2\pi)$; also ist das betrachtete Integral nach der Transformationsformel auch gleich

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{B'} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr \right) d\varphi .$$

Die Stammfunktion des neuen Integranden re^{-r^2} ist leicht zu finden: Aus

$$\frac{d}{dr} e^{-r^2} = -2re^{-r^2}$$

folgt sofort, daß

$$\int re^{-r^2}\,dr = -\tfrac{1}{2} e^{-r^2} + C .$$

Damit können wir weiterrechnen und erhalten das Ergebnis

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} re^{-r^2}\,dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} -\tfrac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2}\,d\varphi = \pi .$$

Also ist $I^2 = \pi$ und, da der Integrand von I überall positiv ist, folgt

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi} .$$

Zur Verallgemeinerung der Transformationsformel auf höhere Dimensionen beachten wir zunächst, daß der Term

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

in der Formel

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right| du\,dv$$

gerade gleich der Determinanten der JACOBI-Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

des Koordinatenwechsels

$$(u,v) \mapsto \big(x(u,v),\ y(u,v)\big)$$

ist. Diese können wir uns auch geometrisch veranschaulichen, denn sie ist ja gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Kantenvektoren

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

Den Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können wir auch wie folgt ausrechnen:

Das (kartesische) Koordinatensystem in $\mathbb{R}^2$ sei so gewählt, daß der Vektor $\vec{a}$ ein Vielfaches $a\vec{e}_1$ des ersten Koordinateneinheitsvektors ist. Falls dann auch noch $\vec{b} = b\vec{e}_2$ ein Vielfaches des zweiten sein sollte, falls also das Parallelogramm sogar ein achsenparalleles Rechteck sein sollte, ist dessen Fläche gleich

$$ab = \det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b})\,.$$

Im allgemeinen wird das Parallelogramm natürlich kein Rechteck sein; da die Basisvektoren im Gegensatz zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufeinander senkrecht stehen, müssen wir $\vec{b}$ dann als Linearkombination $\vec{b} = c\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$ schreiben.

Dabei können wir $b\vec{e}_2$ als Projektion von $\vec{b}$ auf die von $\vec{e}_2$ aufgespannte Koordinatenachse auffassen. Da sich das Parallelogramm durch Scherung in das Rechteck mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $b\vec{e}_2$ überführen läßt und sich der Flächeninhalte bei Scherungen nicht ändern, hat das Parallelogramm immer noch den Flächeninhalt

$$ab = \det\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \det(\vec{a},\vec{b})\,.$$

Beim Übergang zu einem anderen orthonormalen Koordinatensystem werden die Koordinatenachsen gedreht, d.h. sie werden mit einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

multipliziert. Da deren Determinante gleich eins ist, ändert sich dabei nach dem Multiplikationssatz für Determinanten nichts am Wert von $\det(\vec{a},\vec{b})$. Der Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist also stets gleich $\det(\vec{a},\vec{b})$, egal bezüglich welcher Orthonormalbasis die Kantenvektoren dargestellt werden.

Genauso können wir auch in höheren Dimensionen argumentieren: Durch mehrfache Scherung läßt sich ein beliebiges Parallelepiped in einen Quader überführen; das Volumen des von n Kantenvektoren $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n$ aufgespannten Parallelepipeds ist also gleich

$$\det(\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n)\,.$$

(Für $n = 3$ kennen wir diese Formel bereits, denn wir wissen, daß dort das Volumen gleich dem Spatprodukt $(\vec{a}_1 \times \vec{a}_2)\cdot\vec{a}_3$ der drei Vektoren ist, und dieses wiederum ist gleich der Determinanten.)

Damit gilt also im $\mathbb{R}^n$ die

Transformationsformel: $f\colon B \to \mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B \subseteq \mathbb{R}^n$, und die Variablen $x_1,\dots,x_n$ seien als differenzierbare Funktionen

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1,\dots,u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(u_1,\dots,u_n) \end{aligned}$$

neuer Variabler $u_1, \dots, u_n$ dargestellt. Ist dann $B' \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B' \to B; \quad \boldsymbol{u} \mapsto \boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})$$

bijektiv ist, so gilt

$$\int \underset{B}{\cdots} \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \int \underset{B'}{\cdots} \int f\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{u})\big)\, |\det J_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{u})|\, du_1 \cdots du_n\,.$$

■

Ausgeschrieben wird die Formel für den $\mathbb{R}^3$, wenn wir kurz

$$F(u,v,w) \underset{\text{def}}{=} f\big(x(u,v,w),\ y(u,v,w),\ z(u,v,w)\big)$$

schreiben, zu

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_{B'} F(u,v,w) \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix} \right| du\, dv\, dw\,.$$

Als Beispiel können wir wieder Koordinatensysteme betrachten: Für Kugelkoordinaten ist

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \sin\vartheta \\ y &= r\sin\varphi\sin\vartheta \quad , \\ z &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

die JACOBI-Matrix ist also

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}.$$

Entwicklung nach der dritten Zeile ergibt für die Determinante den Wert

$$\begin{aligned} &\cos\vartheta \begin{vmatrix} -r\sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\cos\varphi\sin\vartheta & r\sin\varphi\cos\vartheta \end{vmatrix} \\ &- r\sin\vartheta \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta & -r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta & r\cos\varphi\sin\vartheta \end{vmatrix} \\ &= -r^2\cos\vartheta(\sin\vartheta\cos\vartheta) - r^2\sin\vartheta\cdot\sin^2\vartheta = -r^2\sin\vartheta\,. \end{aligned}$$

Der Betrag der Determinanten der JACOBI-Matrix ist also

$$r^2\,|\sin\vartheta|\,,$$

und mit

$$F(r,\varphi,\vartheta) = f(r\cos\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\cos\vartheta)$$

wird die Transformationsformel zu

$$\iiint_B f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{B'} F(r,\varphi,\vartheta)\cdot r^2\,|\sin\vartheta|\, dr\, d\varphi\, d\vartheta\,.$$

Berechnen wir zur Kontrolle schnell noch einmal das Volumen der Kugel B um den Nullpunkt mit Radius R:

$$\begin{aligned} \iiint_B dx\, dy\, dz &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2\,|\sin\vartheta|\, dr \right) d\varphi \right) d\vartheta \\ &= \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3}\,|\sin\vartheta|\, d\varphi \right) d\vartheta = \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{4\pi R^3}{3}\,. \end{aligned}$$

Außer den Kugelkoordinaten hatten wir im $\mathbb{R}^3$ auch noch Zylinderkoordinaten betrachtet; für diese ist

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \qquad \text{und} \\ z &= z\,, \end{aligned}$$

also
$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
und die Determinante davon ist wie bei den ebenen Polarkoordinaten gleich r. Also haben wir hier im wesentlichen dieselbe Transformationsformel wie bei den ebenen Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten sind schließlich im wesentlichen auch nichts anderes als ebene Polarkoordinaten), nämlich
$$\iiint_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{B'} F(r,\varphi,z)\cdot r\,dr\,d\varphi\,dz\,,$$
wobei wieder
$$F(r,\varphi,z) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$$
sein soll.

Genauso lassen sich auch beliebige andere Koordinatensysteme behandeln, beispielsweise könnte man zum Rechnen mit einem Ellipsoid auch Ellipsoidkoordinaten
$$x = a\cos\varphi\sin\vartheta$$
$$y = b\sin\varphi\sin\vartheta$$
$$z = c\cos\vartheta$$
einführen und damit das Volumen des Ellipsoids
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 1$$
bestimmen. (Die Antwort ist natürlich *(?)* $\frac{4}{3}\pi abc$.)

In Physik und Technik sind noch zahlreiche weitere bewährte Koordinatensysteme im Einsatz, auf die wir hier nicht eingehen können; dank der obigen Transformationsformel kann man immer das benutzen, das der jeweiligen Situation am besten angepaßt ist und mithin am wenigsten Rechnung verlangt.

d) Der Satz von Green und der ebene Satz von Gauß

$B \subset \mathbb{R}^2$ sei ein Bereich, dessen Rand aus endlich vielen Kurvenstücken bestehe. Dann können wir sowohl über B als auch über dessen Randkurve ∂B integrieren; die beiden Sätze in diesem Abschnitt befassen sich mit der Beziehung zwischen diesen beiden Integrationen.

Im allgemeinen kann man natürlich nicht viel erwarten: Nimmt man aus B eine Kurve γ heraus, ist es bei der Integration einer stetigen Funktion gleichgültig, ob man über B oder über $B \setminus \gamma$ integriert, das Randintegral ändert sich aber um das im allgemeinen nicht verschwindende Kurvenintegral über γ.

Für eine geschlossene Kurve γ dagegen erwarten wir, wenn wir uns von der Anschauung leiten lassen und uns die Kurve als eine Art deformierten Kreis vorstellen, daß sie die Ebene in zwei Bereiche zerlegt: einen beschränkten Bereich B und einen unbeschränkten Bereich B'. Hier sollten sich γ und B gegenseitig so stark beeinflussen, daß eigentlich auch die Integration über B etwas mit der Integration über γ zu tun haben müßte.

Nun ist es natürlich etwas gefährlich, sich *nur* von der Anschauung leiten zu lassen, denn es gibt sicherlich erheblich mehr Kurven, als man sich gemeinhin vorstellt. Beispielsweise gibt es auch Kurven, die wie eine Ziffer 8 aussehen, etwa die Lemniskate, und diese zerlegen die Ebene in *drei* Bereiche. Wir müssen also noch zusätzlich fordern, daß sich die Kurve nicht selbst überkreuzt, aber dann gilt in der Tat

Jordanscher Kurvensatz: γ sei eine geschlossene ebene Kurve ohne Überkreuzungen. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$ zwei Zusammenhangskomponenten, von denen die eine beschränkt und die andere unbeschränkt ist.

Der Satz ist nach demselben MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN benannt, den wir bereits von der JORDANschen Normalform her kennen.

Der Beweis dieses anschaulich fast selbstverständlichen Satzes erfordert einen erstaunlich großen Aufwand: Man muß die Ebene in kleine Quadrate (oder Dreiecke oder etwas ähnliches) unterteilen, γ durch Kantenzüge aus deren Seiten annähern, den Satz durch aufwendige Rechnungen mit formalen Summen von Quadraten und Quadratseiten für die angenäherten Kurven beweisen und dann schließlich noch durch ein Limesargument zeigen, daß die Aussage auch für γ selbst gilt. Die genaue Durchführung dieses Beweises würde etwa drei Vorlesungstermine erfordern – ein Aufwand, der für uns in keinem vernünftigen Zusammenhang mit seinem Nutzen steht: Bei den meisten in der Praxis vorkommenden Kurven wird die Aussage des JORDANschen Kurvensatzes zumindest für diese speziellen Kurven ohnehin klar sein.

Um den JORDANschen Kurvensatz zu umgehen, starten wir einfach mit einem Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, von dem wir all das verlangen, was uns nachher das Leben einfach macht; in der Praxis sollte es (hoffentlich) selten schwierig sein, diese Forderungen für die Bereiche aus konkreten Anwendungen zu verifizieren.

Satz von Green: $B \subset \mathbb{R}^2$ sei eine abgeschlossene Menge, die sowohl als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ I wie auch als Vereinigung endlich vieler Normalbereiche vom Typ II geschrieben werden kann; ihre Randkurve γ sei so orientiert, daß B im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei $\vec{V} \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R}^2)$ ein differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen Teilmenge $D \supset B$ von $\mathbb{R}^2$. Dann ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \iint_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy\,.$$

Beweis: Wir betrachten zunächst nur ein Vektorfeld $\vec{V} = \binom{V_1}{0}$ mit verschwindender y-Komponente und setzen B als Normalbereich

$$N = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \quad\text{und}\quad f(x) \le y \le g(x)\right\}$$

voraus. Das Integral über die Randkurve γ berechnen wir am besten komponentenweise:

$$\gamma_1\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(t, f(t)\big)$$

sei die untere Begrenzungskurve,

$$\gamma_2\colon \big[f(b), g(b)\big] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto (b, t)$$

die rechte Randstrecke,

$$\gamma_3\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(t, g(t)\big)$$

die obere Begrenzungskurve, und

$$\gamma_4\colon \big[f(a), g(a)\big] \to \mathbb{R}^2; \quad t \mapsto \big(a, t\big)$$

schließlich die linke Seitenstrecke.

Dann ist $\dot\gamma_1(t) = \binom{1}{f'(t)}$, also

$$\int_{\gamma_1} \vec{V}\,ds = \int_a^b \begin{pmatrix} V_1\big(t, f(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b V_1\big(t, f(t)\big)\,dt$$

und entsprechend

$$\int_{\gamma_3} \vec{V}\,ds = \int_a^b \begin{pmatrix} V_1\big(t, g(t)\big) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ g'(t) \end{pmatrix} dt = \int_a^b V_1\big(t, g(t)\big)\,dt\,.$$

Für die beiden Seitenstrecken ist $\dot\gamma_2(t) = \binom{0}{1} = \dot\gamma_4(t) = \binom{0}{1}$, also ist

$$\int_{\gamma_2} \vec{V}\,ds = \int_{f(a)}^{g(a)} \begin{pmatrix} V_1(a, t) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = 0\,,$$

und genauso folgt auch das Verschwinden des Integrals über γ_4.

Wenn wir im Gegenuhrzeigersinn um N herum integrieren, werden die Kurvenstücke γ_3 und γ_4 rückwärts durchlaufen, also ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{V}\,ds &= \int_{\gamma_1} \vec{V}\,ds + \int_{\gamma_2} \vec{V}\,ds - \int_{\gamma_3} \vec{V}\,ds - \int_{\gamma_4} \vec{V}\,ds \\ &= \int_a^b V_1\big(t, f(t)\big)\,dt - \int_a^b V_1\big(t, g(t)\big)\,dt \\ &= \int_a^b \Big(V_1\big(t, f(t)\big) - V_1\big(t, g(t)\big)\Big)\,dt\,.\end{aligned}$$

Da N Normalbereich vom Typ I ist, können wir auch das Flächenintegral über N leicht ausrechnen:

$$\iint\limits_N \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_N -\frac{\partial V_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= -\int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial V_1}{\partial y}\,dy\right) dx = \int_a^b \Big(V_1\big(x, g(x)\big) - V_1\big(x, f(x)\big)\Big)\,dx\,.$$

Zumindest für das hier betrachtete spezielle Vektorfeld V ohne y-Komponente und einen Normalbereich vom Typ I ist der Satz also richtig.

Damit gilt er aber zumindest für dieses spezielle Vektorfeld auch für jeden Bereich B, der sich in Normalbereiche vom Typ I zerlegen läßt: Das Flächenintegral über B ist gleich der Summe der Flächenintegrale über die Normalbereiche vom Typ I, in die wir B zerlegt haben und somit problemlos. Die Randkurve von B besteht einerseits aus Kurvenstücken, die auch zum Rand von B gehören, andererseits aus solchen, die durch die Zerlegung eingeführt wurden und zwei Normalbereiche voneinander trennen. Letztere werden aber als Randkurven der beiden angrenzenden Normalkurven jeweils in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so daß sich die Integrale längs solcher Kurvenstücke gegenseitig wegheben. Summiert man also die Integrale über die Ränder aller Normalbereiche auf, bleiben am Ende nur die Integrale längs jener Kurvenstücke übrig, die auf der Randkurve von B liegen, die Summe ist somit gleich dem Integral über die Randkurve.

Damit ist der Satz bewiesen für alle Vektorfelder $\vec{V}$ mit verschwindender y-Komponente.

Als nächstes beweisen wir ihn für Vektorfelder $\vec{V}$ mit verschwindender x-Komponente; wenn man mit Normbereichen vom Typ II argumentiert statt mit solchen vom Typ I, kann man dazu die obigen Argumente fast wörtlich wiederholen.

Der Rest des Beweises ist nun einfach: Ein beliebiges Vektorfeld $\vec{V}$ läßt

sich als Summe

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ V_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ V_2(x,y) \end{pmatrix}$$

schreiben, und der Satz gilt für beide Summanden. Da beide Seiten der Behauptung linear in $\vec{V}$ sind, folgt der Satz auch für $\vec{V}$ selbst. ■

GEORGE GREEN (1793–1841) war der Sohn eines Bäckers aus Nottingham. Er besuchte nur von 1801 bis 1802 eine Schule, danach arbeitete er in der Bäckerei und später in der dazugekauften Mühle. Es ist nicht bekannt, wann und wie er Mathematik lernte. 1827 veröffentlichte er sein Buch *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theory of Electricity and Magnetism,* von dem 51 Exemplare verkauft wurden, größtenteils in Nottingham selbst. Einer der Leser stellte Kontakte zur Cambridge Philosophical Society und zur Royal Academy in Edinburgh her, so daß Greens weitere Arbeiten (über Elektrizität und über Hydrodynamik) dort veröffentlicht wurden. 1833 begann er mit dem Studium der Mathematik an der Universität Cambridge; nach dessen Abschluß blieb er in Cambridge, bis er 1840 wegen gesundheitlicher Probleme nach Nottingham zurückkehrte. Weder GREEN selbst noch seine Zeitgenossen erkannten die Bedeutung seiner Arbeiten, die, in heutiger Sprechweise, Potentialfunktionen einführten und für die Physik nutzbar machten. Auf dieser Grundlage bauten später JAMES CLERK MAXWELL (1831–1879) und andere die Elektrodynamik auf.

Wenn wir für $\vec{V}$ speziell ein Vektorfeld der Form

$$\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} -\Phi_y(x,y) \\ \Phi_x(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \Phi \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$$

einsetzen, erhalten wir für das Flächenintegral

$$\iint\limits_B \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint\limits_B (\Phi_{xx} + \Phi_{yy})\,dx\,dy = \iint\limits_B \Delta\Phi\,dx\,dy\,,$$

wobei Δ wie üblich den LAPLACE-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

bezeichnet.

Das Integral über die Randkurve $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ wird zu

$$\int_\gamma \begin{pmatrix} -\Phi_y\big(\gamma(t)\big) \\ \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_1(t) \\ \dot\gamma_2(t) \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_\gamma \Big(-\Phi_y\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma_1(t) + \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma_2(t)\Big)\, dt$$

$$= \int_\gamma \begin{pmatrix} \Phi_x\big(\gamma(t)\big) \\ \Phi_y\big(\gamma(t)\big) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} dt\,.$$

Der erste Vektor im Integranden der dritten Zeile ist einfach der Gradient von Φ. Der zweite Vektor hat Skalarprodukt null mit dem Tangentenvektor $\dot\gamma(t) = \binom{\dot\gamma_1(t)}{\dot\gamma_2(t)}$, steht also auf diesem senkrecht und ist somit ein *Normalenvektor.* Das Skalarprodukt des Gradienten einer Funktion mit einem Vektor ist bekanntlich die *Richtungsableitung* der Funktion in Richtung dieses Vektors; mit

$$\vec n = \begin{pmatrix} \dot\gamma_2(t) \\ -\dot\gamma_1(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \partial_{\vec n} = \vec n \cdot \operatorname{grad}$$

erhalten wir somit

Satz von Gauß (ebener Fall)**:** Für B, D und γ wie im Satz von GREEN und $\Phi \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R}^2)$ gilt

$$\iint_B \Delta\Phi\; dx\, dy = \int_\gamma \partial_{\vec n}\Phi\; ds\,.$$

■

Mit einer Verallgemeinerung sowie auch mit der anschaulichen Interpretation dieses Satzes werden wir uns in Abschnitt *f)* noch genauer befassen.

e) Oberflächenintegrale

Im dreidimensionalen Fall wird der Satz von GAUSS, wie die meisten wohl bereits aus der Physik wissen, ein Volumenintegral mit dem Fluß

durch eine Oberfläche in Verbindung bringen. Was Volumenintegrale sind, haben wir inzwischen auch hier definiert; in diesem Abschnitt geht es um den Begriff des Oberflächenintegrals, um den Fluß eines Vektorfelds durch eine Oberfläche und um verwandte Themen.

Die Vorgehensweise bei der Definition eines Oberflächenintegrals entspricht genau der bei der Definition des Kurvenintegrals: Dort hatten wir Kurvenstücke als Funktionen $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ definiert; hier definieren wir entsprechend *Flächenstücke* durch Funktionen zweier Parameter. Wir müssen dabei allerdings etwas sorgfältiger vorgehen, denn im Vergleich zum Kurvenfall ist die Situation zumindest in zweierlei Hinsicht komplexer: Erstens gibt es auf der reellen Geraden im wesentlichen nur eine Art von zusammenhängenden Teilmengen, nämlich die Intervalle. In der Ebenen gibt es erheblich mehr Möglichkeiten – aber damit hatten wir uns ja schon bei der Definition von Flächen- und Volumenintegralen beschäftigt. Zweitens mußten wir bei Kurven nur fordern, daß $\dot\gamma(t)$ nirgends verschwindet, um die Existenz eines Tangentenvektors zu garantieren. Hier im Zweidimensionalen recht das nicht mehr: Ein Flächenstück hat in jedem Punkt Anspruch nicht nur auf eine Tangente, sondern auf eine ganze *Tangentialebene;* wir müssen also sicherstellen, daß es in jedem Punkt mindestens zwei linear unabhängige Tangentenvektoren gibt.

Die dazu notwendigen Definitionen kann man problemlos für Flächenstücke in jedem $\mathbb{R}^n$ hinschreiben; wir wollen uns aber, da dies für alle hier betrachteten Anwendungen ausreicht, auf den etwas anschaulicheren Fall von Flächenstücken im $\mathbb{R}^3$ beschränken.

Ein Flächenstück soll demnach gegeben sein durch eine Funktion

$$f\colon B \to \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

auf einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$; mit Blick auf unsere Erfahrungen bei Kurvenstücken wollen wir von vornherein fordern, daß f differenzierbar sein soll in einer offenen Umgebung von B. Für kleine reelle Zahlen h, k ist dann für einen Punkt $(u_0, v_0) \in B$

$$f(u_0{+}h, v_0{+}k) = f(u_0, v_0) + f_u(u_0, v_0)\cdot h + f_v(u_0, v_0)\cdot k + o\Big(\sqrt{h^2 + k^2}\Big)\,.$$

Da hier nur h und k variabel sind, bedeutet die Forderung nach zwei linear unabhängigen Tangentialvektoren, daß die beiden Vektoren $f_u(u_0, v_0)$ und $f_v(u_0, v_0)$ in allen Punkten $(u_0, v_0) \in B$ linear unabhängig sein müssen.

An dieser Stelle führt die Beschränkung auf den $\mathbb{R}^3$ zu einer kleinen Vereinfachung: Im $\mathbb{R}^3$, und nur dort, existiert ein Vektorprodukt; zwei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn dieses Vektorprodukt ungleich dem Nullvektor ist. Sowohl der Betrag als auch die Richtung dieses Vektors werden uns schon bald in mehrfacher Hinsicht nützlich sein; wir definieren daher

Definition: Ein reguläres Flächenstück im $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch einen Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$ und eine in einer offenen Menge $D \supseteq B$ differenzierbaren Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^3;\quad (u, v) \mapsto f(u, v)$, für die gilt:
1.) Die Einschränkung $f_{|B}$ von f auf B ist injektiv.
2.) In jedem Punkt $(u_0, v_0) \in B$ ist $f_u(u_0, v_0) \times f_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$.

Die wichtigste Oberfläche, mit der wir es im folgenden zu tun haben werden, ist die der Kugel. Die Oberfläche einer Kugel vom Radius R hat in Kugelkoordinaten die Gleichung $r = R$ mit beliebigen Winkelkoordinaten φ und ϑ, sie ist also (in kartesischen Kordinaten) gegeben durch die Funktion

$$f\colon [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3; \quad (\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} R\cos\varphi\sin\vartheta \\ R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\vartheta \end{pmatrix} .$$

Die Differenzierbarkeit ist hier überhaupt kein Problem: Die angegebene Funktion ist sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$ beliebig oft stetig differenzierbar.

Bei der Injektivität gibt es allerdings Probleme: Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist $\sin\vartheta = 0$; daher werden alle Parameterpaare $(\varphi, 0)$ auf $(0, 0, R)$ und aller Parameterpaare (φ, π) auf $(0, 0, -R)$ abgebildet.

Das ist aber glücklicherweise auch bereits alles was passieren kann, denn falls $\sin\vartheta \neq 0$ ist, können wir aus der dritten Komponenten $R\cos\vartheta$ den Winkel $\vartheta \in [0, \pi]$ eindeutig bestimmen. Damit kennen wir auch $R\sin\vartheta$ und bekommen aus den ersten beiden Komponenten von f den Cosinus und den Sinus von φ, wodurch $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig festgelegt ist.

Die partiellen Ableitungen von f sind

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} ,$$

also ist

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2\cos\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\varphi\sin^2\vartheta \\ R^2\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} = R\sin\vartheta \cdot f(\varphi, \vartheta) .$$

Da für eine echte Kugel $R > 0$ sein muß und $f(\varphi, \vartheta)$ die Länge R hat, ist dieser Vektor genau dann gleich dem Nullvektor, wenn $\sin\vartheta = 0$ ist; wie bei der Injektivität gibt es also wieder Probleme an den Polen, aber auch nur dort.

Somit können wir die Kugel nur dann als reguläres Flächenstück auffassen, wenn wir die beiden Pole herausnehmen, d.h. wenn wir uns auf den Parameterbereich $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$ beschränken.

Für die meisten praktischen Zwecke ist das natürlich völlig unproblematisch: Bei der Flächenbestimmung oder allgemeiner der Integration einer beschränkte Funktion sind einzelne, isoliert liegende Punkte irrelevant. Lediglich im Falle von uneigentlichen Integranden muß man hier sehr vorsichtig sein; hier in dieser Vorlesung sollen entsprechende Integrale deshalb vorsichtshalber gleich gar nicht erst definiert werden.

Nachdem wir nun wissen, was ein reguläres Flächenstück ist, müssen wir als nächstes lernen, damit zu rechnen. Bevor wir uns an die Bestimmung von Flächeninhalten machen, ist es vielleicht ganz nützlich (wenn auch nicht unbedingt notwendig), daß wir uns ein paar Gedanken über die *Längenmessung* machen.

Längen sind Eigenschaften von Kurven; wir müssen also eine Kurve oder – da wir Längen auch stückweise aneinandersetzen können – einfacher ein Kurvenstück auf einem Flächenstück betrachten. Genau wie man etwa bei der Navigation auf der Erde nicht von einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem ausgeht, sondern von der geographischen Länge und Breite, empfiehlt es sich auch hier, Kurven über die

Parameter des Flächenstücks zu definieren – und sei es auch nur, um sicher zu sein, daß die Kurve auch wirklich auf dem Flächenstück liegt.

Wir beschreiben eine Kurve auf einem Flächenstück $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ daher durch eine Funktion

$$\delta\colon [a,b] \to B; \quad t \mapsto \big(u(t), v(t)\big) ;$$

die eigentliche Kurve im $\mathbb{R}^3$ wird dann beschrieben durch die zusammengesetzte Abbildung

$$\gamma = f \circ \delta\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3; \quad t \mapsto f\big(u(t), v(t)\big) .$$

Wir wollen natürlich, daß diese Kurve immer dieselbe Länge hat, egal ob wir sie einfach so im $\mathbb{R}^3$ oder auf einem Flächenstück betrachten. Die Länge des Kurvenstücks γ auf dem Flächenstück f ist daher gleich der bekannten Länge des Kurvenstücks γ im $\mathbb{R}^3$, also

$$\int_a^b |\dot\gamma(t)|\; dt = \int_a^b \left| f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt}\right| dt .$$

Der Betrag des Vektors $f_u\big(u(t), v(t)\big)\frac{du}{dt} + f_v\big(u(t), v(t)\big)\frac{dv}{dt}$ ist gleich der Wurzel aus dem Skalarprodukt des Vektors mit sich selbst, also der Wurzel aus

$$\begin{aligned} & f_u\big(u(t), v(t)\big)^2 \left(\frac{du}{dt}(t)\right)^2 \\ & + 2 f_u\big(u(t), v(t)\big) \cdot f_v\big(u(t), v(t)\big) \left(\frac{du}{dt}(t)\right)\left(\frac{dv}{dt}(t)\right) \\ & + f_v\big(u(t), v(t)\big)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 . \end{aligned}$$

In dieser Formel können wir zwei Arten von Termen unterscheiden: Rechts stehen jeweils die Ableitungen von u und v nach t; diese hängen nur von der jeweiligen Kurve ab, die ja gerade durch die Funktionen $u(t)$ und $v(t)$ definiert ist. Links dagegen stehen Ausdrücke in den partiellen Ableitungen von f nach u und v; diese sind Funktionen auf dem

Flächenstück und sind insbesondere unabhängig von jeder Kurve. Wir bezeichnen daher diese drei letzteren Größen

$$\begin{aligned} E(u,v) &= f_u(u,v) \cdot f_u(u,v) , \\ F(u,v) &= f_u(u,v) \cdot f_v(u,v) \quad \text{und} \\ G(u,v) &= f_v(u,v) \cdot f_v(u,v) \end{aligned}$$

als *Fundamentalgrößen* des Flächenstücks f.

Um etwas Übung im Umgang mit diesen Größen zu bekommen, wollen wir sie für die Kugeloberfläche in ihrer oben angegebenen Parametrisierung berechnen. Hier ist, wie wir schon wissen,

$$f_\varphi = \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\vartheta \\ R\cos\varphi\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_\vartheta = \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\vartheta \\ R\sin\varphi\cos\vartheta \\ -R\sin\vartheta \end{pmatrix} ;$$

also ist

$$\begin{aligned} E(\varphi,\vartheta) &= R^2(\sin^2\varphi\sin^2\vartheta + \cos^2\varphi\sin^2\vartheta) = R^2\sin^2\vartheta \\ F(\varphi,\vartheta) &= R^2(-\sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi\cos\vartheta) = 0 \\ G(\varphi,\vartheta) &= R^2(\cos^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\varphi\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta) = R^2 . \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis sollte man auch geometrisch interpretieren: Das Verschwinden von F, die Orthogonalität von f_φ und f_ϑ also, bedeutet, daß die Längenkreise und die Breitenkreise in jedem Punkt der Kugel (außer den beiden Polen) aufeinander senkrecht stehen; die Konstans von G kommt daher, daß alle Längenkreise gleich lang sind, und die ϑ-Abhängigkeit von E schließlich reflektiert die Tatsache, daß die Breitenkreise verschiedene Radien haben.

Allgemein kann man die Länge einer Kurve auf einem Flächenstück somit als Integral

$$\int_a^b \sqrt{E\,\dot u^2 + 2F\,\dot u\dot v + G\,\dot v^2}\,dt$$

berechnen; dem interessierten Leser sei empfohlen, damit beispielsweise überprüfen, daß Breitenkreise i.a. nicht die kürzeste Verbindung zwischen zweien ihrer Punkte sind, sondern daß der Kreis um den Kugelmittelpunkt durch diese beiden Punkte (der sogenannte Großkreis) eine kürzere Verbindungskurve liefert.

Unser Hauptziel hier sind allerdings nicht Längenberechnungen, sondern die Berechnung von Oberflächen *bzw.* von Flüssen von Vektorfeldern durch diese Oberflächen. Dabei gehen wir genauso vor, wie bei der Transformationsformel im vorigen Abschnitt: Wir unterteilen den Parameterbereich B durch Rechtecke, und betrachten deren Bilder auf dem Flächenstück. Diese sind, da wir f als differenzierbar vorausgesetzt haben, in erster Näherung Parallelogramme, wobei die Näherung bei zunehmender Verfeinerung des Rechteckgitters auf B immer besser wird. Der Flächeninhalt eines solchen Parallelogramms mit Kantenvektoren $f_u \cdot h$ und $f_v \cdot k$ ist

$$hk \cdot |f_u \times f_v| \;,$$

also sollte die Fläche des Flächenstücks gleich

$$\iint_B |f_u \times f_v| \; du \, dv$$

sein, und genau das definieren wir auch als den Flächeninhalt eines Flächenstücks.

Definition: Der Flächeninhalt eines Flächenstücks $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\iint_f dO \underset{\text{def}}{=} \iint_B |f_u \times f_v| \; du \, dv \,.$$

(Das O in dO soll dabei an Oberfläche erinnern.)

Zur Kontrolle, ob diese Definition sinnvoll sein kann, berechnen wir die Oberfläche der Kugel: Hier ist, wie wir bereits wissen,

$$f_\varphi \times f_\vartheta = \begin{pmatrix} R^2 \cos\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\varphi \sin^2\vartheta \\ R^2 \sin\vartheta \cos\vartheta \end{pmatrix} = R \sin\vartheta \cdot f(\varphi, \vartheta) \,;$$

die Länge dieses Vektors ist also, da $f(\varphi, \vartheta)$ als Radiusvektor natürlich die Länge R haben muß, gleich $R^2 \sin\vartheta$. Die Oberfläche der Kugel berechnet sich daher zu

$$\begin{aligned} \iint_B R^2 \sin\vartheta &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} R^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \right) d\varphi \\ &= 2\pi \cdot R^2 \cdot (-\cos\pi + \cos 0) = 4\pi R^2 \,, \end{aligned}$$

womit wir uns wieder einmal in hundertprozentiger Übereinstimmung mit der Schulmathematik befinden.

Genau wie Kurvenintegrale sind auch Oberflächenintegrale unabhängig von der Parametrisierung des Flächenstücks; im wesentlichen geht alles genau wie bei den Kurvenintegralen, ist aber etwas aufwendiger. Der Vollständigkeit halber sei die entsprechende Aussagen samt Beweis im Kleindruck abgedruckt:

Lemma: $f\colon B \to \mathbb{R}^3$ und $g\colon B' \to \mathbb{R}^3$ seien zwei Flächenstücke, für die es eine in einer Umgebung von B stetig differenzierbare Funktion φ gebe, die B bijektiv auf B' abbildet derart, daß $g = f \circ \varphi$ ist. Dann ist

$$\iint_f du \, dv = \iint_g du \, dv \,.$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\iint_f dO = \iint_B |f_u \times f_v| \; du \, dv \quad \text{und} \quad \iint_g dO = \iint_B |g_u \times g_v| \; du \, dv \,.$$

Wenn wir die drei Komponenten von f *bzw.* g mit $f^{(x)}, f^{(y)}, f^{(z)}$ *bzw.* $g^{(x)}, g^{(y)}, g^{(z)}$ bezeichnen, ist

$$f_u \times f_v = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} f_v^{(z)} - f_u^{(z)} f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} f_v^{(x)} - f_u^{(x)} f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} f_v^{(y)} - f_u^{(y)} f_v^{(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \\ f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(z)} & f_v^{(z)} \\ f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} f_u^{(x)} & f_v^{(x)} \\ f_u^{(y)} & f_v^{(y)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} ,$$

und genau entsprechend natürlich auch für g. Die links stehenden Determinanten sind offensichtlich gerade die Determinaten der JACOBI-Matrizen der verschiedenen zweidimensionalen Projektionen von f; an der ersten Stelle etwa die der Funktion

$$f^{(yz)} \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f^{(y)} \\ f^{(z)} \end{pmatrix} : B \to \mathbb{R}^2 .$$

Analog dazu definieren wir auch Funktionen $f^{(zx)}$, $f^{(xy)}$ und die entsprechenden Funktionen für g.

Aus $g = f \circ \varphi$ folgt, daß auch $g^{(x)} = f^{(x)} \circ \varphi$ und entsprechend für die anderen Komponenten. Damit ist auch $f^{(yz)} = g^{(yz)} \circ \varphi$ *usw.*

Nach der zweidimensionalen Kettenregel ist dann

$$J_{g^{(yz)}} = \left(J_{f^{(yz)}} \circ \varphi\right) \cdot J_\varphi ,$$

also ausgeschrieben

$$\begin{pmatrix} g_u^{(y)} & g_v^{(y)} \\ g_u^{(z)} & g_v^{(z)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_u^{(y)} \circ \varphi & f_v^{(y)} \circ \varphi \\ f_u^{(z)} \circ \varphi & f_v^{(z)} \circ \varphi \end{pmatrix} \cdot J_\varphi .$$

Entsprechendes gilt auch für die anderen Indexkombinationen, und nach dem Multiplikationssatz für Determinanten gilt eine entsprechende Produktbeziehung auch für die Determinaten der hier stehenden Matrizen; insgesamt erhalten wir also, daß

$$g_u \times g_v = \left((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi)\right) \cdot \det J_\varphi$$

ist und dementsprechend

$$|g_u \times g_v| = \left((f_u \circ \varphi) \times (f_v \circ \varphi)\right) \cdot |\det J_\varphi| .$$

Damit folgt die Behauptung aus der Transformationsformel. ■

Die Berechnung von Vektorprodukten ist etwas umständlich und sehr anfällig für Vorzeichenfehler; wir wollen daher sehen, daß die Fundamentalgrößen einer Fläche ihrem Namen gerecht werden und uns auch diese Berechnung abnehmen können: Der Flächeninhalt eines Parallelogramms mit Kantenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gleich dem Produkt der Längen der beiden Vektoren mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels α. Das Quadrat des Flächeninhalts ist also

$$\begin{aligned} &(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\sin^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})(1-\cos^2\alpha) \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b})\cos^2\alpha = (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 , \end{aligned}$$

und der Flächeninhalt selbst somit

$$\sqrt{(\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} .$$

Wir interessieren uns für das Parallelogramm mit Kantenvektoren $h \cdot f_u$ und $k \cdot f_v$; hier wird diese Formel zu

$$hk \cdot \sqrt{(f_u \cdot f_u)(f_v \cdot f_v) - (f_u \cdot f_v)^2} = hk\sqrt{EG - F^2} .$$

Die Fläche eines Flächenstücks kann also auch berechnet werden als

$$\iint_B \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv .$$

Im konkreten Fall steht hier natürlich genau dasselbe Integral wie bei der Formel mit dem Betrag des Vektorprodukts, allerdings erfordert diese Formel, sofern man die Fundamentalgrößen einer Fläche bereits kennt, deutlich weniger Rechenaufwand. Dem Leser sei empfohlen, sich am Beispiel der Kugeloberfläche hiervon zu überzeugen!

Obwohl wir uns auf Flächen im $\mathbb{R}^3$ beschränken wollen, sei hier zumindest kurz darauf hingewiesen, daß wir bei der Herleitung dieser neuen Darstellung des Flächeninhalts nirgends benutzen mußten, daß wir im $\mathbb{R}^3$ sind; diese Formel gilt also auch für Flächenstücke im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$.

Eine für uns wichtige Besonderheit, die *nur* im $\mathbb{R}^3$ gilt, ist dagegen die Tatsache, daß wir jedem Flächenstück eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen können: Im Dreidimensionalen gibt es nur eine Richtung, die auf der Tangentialebenen eines Flächenstücks senkrecht steht; in Dimension $n > 3$ gibt es dagegen einen ganzen $(n-2)$-dimensionalen Raum mit dieser Eigenschaft.

Wenn wir von der Parameterdarstellung $f \colon D \to B$ eines regulären Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ und einer festen Reihenfolge der Parameter ausgehen, können wir sogar unterscheiden, nach welcher Seite diese Richtung sich von der Fläche entfernt: Die Tangentialebene wird aufgespannt von den partiellen Ableitungen f_u und f_v von f nach den beiden Parametern u, v auf $D \subseteq \mathbb{R}^2$, und das Kreuzprodukt $f_u \times f_v$ liefert einen Vektor, der auf diesen beiden Tangentialvektoren und somit der gesamten Tangentialebenen senkrecht steht.

Damit können wir jedem Punkt eines *regulären* Flächenstücks eine eindeutig bestimmte Normalenrichtung zuordnen. Man beachte, daß dies nur möglich ist aufgrund der Forderungen, die wir an ein reguläres Flächenstück gestellt haben: Die Abbildung f muß injektiv sein, so daß die Parameterwerte (u, v) zu jedem Punkt des Flächenstücks eindeutig bestimmt sind, und $f_u \times f_v$ darf nirgends verschwinden, da der Nullvektor keine wohlbestimmte Richtung hat.

Typisches Beispiel eines nichtregulären Flächenstücks ist das MÖBIUS-Band

$$f\colon D = [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3; \quad (u, v) \mapsto \begin{pmatrix} (2 + u\cos v)\, \cos 2v \\ (2 + u\cos v)\, \sin 2v \\ u \sin v \end{pmatrix},$$

das durch Zusammenkleben der Enden eines einmal verdrillten rechteckigen Streifens entsteht. Hier ist f für $u = 0$ nicht injektiv, denn $f(0, v) = f(0, v + \pi)$; wir haben also kein reguläres Flächenstück. In der Tat wir für die Parameterwerte $(0, v)$ der Mittelkreis des Bandes zweimal durchlaufen. Dort ist

$$f_u(0, v) = \begin{pmatrix} \cos v \cos 2v \\ \cos v \sin 2v \\ \sin v \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f_v(0, v) = \begin{pmatrix} -4 \sin 2v \\ 4 \cos 2v \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$f_u(0, v) \times f_v(0, v) = \begin{pmatrix} -4 \sin v \cos 2v \\ -4 \sin v \sin 2v \\ 4 \cos v \end{pmatrix}$$

und damit

$$f_u(0, v) \times f_v(0, v) = -f_u(0, v + \pi) \times f_v(0, v + \pi) .$$

es gibt also auf dem Mittelkreis keine eindeutig bestimmte Normalenrichtung.

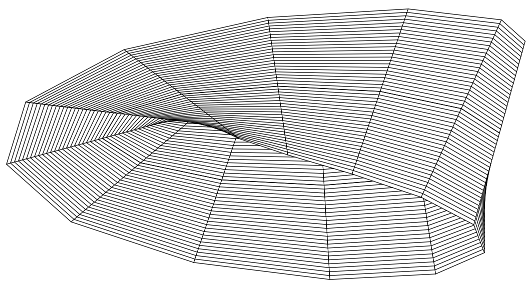


Abb. 61: Das Möbiusband

Für Kurven hatten wir einerseits RIEMANN-STIELTJES-Integrale definiert, die für eine beliebige Funktion auf der Kurve erklärt sind und in deren Definition die Länge des Tangentenvektors eingeht; andererseits hatten wir Integrale über Vektorfelder, in deren Definition der Tangentenvektor selbst einging. Genauso gehen wir auch hier bei den Oberflächenintegralen vor, nur daß wir jetzt den Normalenvektor anstelle des Tangentenvektors benutzen:

Definition: $f\colon D \to \mathbb{R}^3$ sei ein reguläres Flächenstück.
a) Ist g eine auf $f(D)$ definierte stetige Funktion, so bezeichnen wir

$$\iint_f g\, dO \underset{\text{def}}{=} \iint_D g\big(f(u, v)\big)\, \left|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\right|\, du\, dv$$

als *Oberflächenintegral* von g über f.
b) Ist $\vec{V}$ ein in einer Umgebung von $f(D)$ definiertes Vektorfeld, so bezeichnen wir

$$\iint_f \vec{V} \cdot d\vec{O} \underset{\text{def}}{=} \iint_D \vec{V}\big(f(u, v)\big) \cdot \big(f_u(u, v) \times f_v(u, v)\big)\, du\, dv$$

als den *Fluß* des Vektorfelds $\vec{V}$ durch die Oberfläche f.

Eine unproblematische Verallgemeinerung des obigen Lemmas zeigt, daß auch diese Integrale im dort definierten Sinne unabhängig von der Parametrisierung sind.

Der Name *Fluß* für das unter *b)* definierte Integral wird klar, wenn man sich f etwa als eine Kugeloberfläche vorstellt. In jedem Punkt $\boldsymbol{x}$ auf dieser Oberfläche kann man ein kartesisches Koordinatensystem aus einem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}_{\boldsymbol{x}}$ und zwei Tangenteneinheitsvektoren verankern. Drückt man nun den Vektor $\vec{V}(\boldsymbol{x})$ in diesem Koordinatensystem aus, so beschreibt die $\vec{n}_{\boldsymbol{x}}$-Komponente jenen Teil des Vektors, der durch die Kugeloberfläche hindurch nach innen oder außen geht (welches von beiden hängt ab vom Vorzeichen der Komponente und von der Orientierung des Normaleneinheitsvektors), während die beiden anderen Komponenten den Teil beschreiben, der auf der Oberfläche bleibt, also sozusagen den Fluß *auf* der Oberfläche im Gegensatz zum Fluß *durch* die Oberfläche. Letzterer läßt sich berechnen als das Skalarprodukt $\vec{V}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{n}_x$ mit dem Normaleneinheitsvektor, und das Integral über diese Funktion ist

$$\iint_f (\vec{V} \cdot \vec{n}_{\boldsymbol{x}})\, dO = \iint_f \vec{V} \cdot d\vec{O}\,,$$

denn

$$f_u \times f_v = |f_u \times f_v|\; \vec{n}_{\boldsymbol{x}}\,.$$

f) Die Sätze von Stokes und Gauß

In diesem Abschnitt geht es um drei der zentralsten Sätze der mehrdimensionalen Analysis: Außer den beiden im Titel erwähnten Sätzen soll noch das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bewiesen werden.

Wir beginnen mit letzterem sowie dem Satz von STOKES: Bei beiden geht es darum, die Zirkulation eines Vektorfelds zu bestimmen. Beide Sätze gelten in beliebiger Dimension, jedoch wollen wir sie der Einfachheit halber nur für den $\mathbb{R}^3$ beweisen.

Ausgangspunkt ist ein reguläres Flächenstück $f: D \to \mathbb{R}^3$; dessen Bild $B = f(D)$, das „eigentliche“ geometrische Flächenstück also, sei beschränkt und habe eine reguläre Kurve $\gamma: [a, b] \to \mathbb{R}^3$ als Rand. Wie schon mehrfach erwähnt, wollen wir Kurvenintegrale längs γ mit Oberflächenintegralen über f oder – wie wir wegen der Parameterunabhängigkeit auch einigermaßen korrekt sagen können – B in Verbindung bringen.

Wir gehen also aus von einem Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$, dessen (offener) Definitionsbereich G sowohl B als auch γ enthält, und wollen Informationen über das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \vec{V}\, ds\,.$$

Dazu approximieren wir B durch ein Flächenstück B^*, das wir aus endlich vielen ungefähr rechteckförmigen Teilmengen R_i zusammensetzen

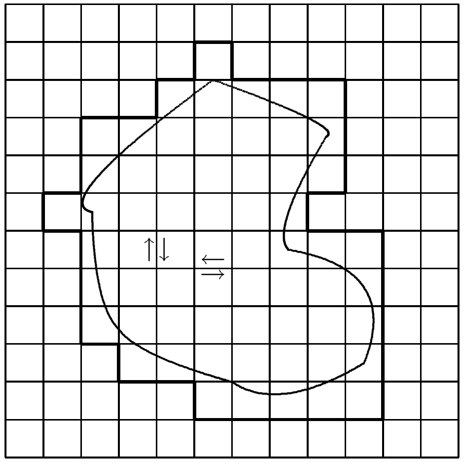


Abb. 62: Unterteilung eines Bereichs

können; ein grobes Bild einer solchen Unterteilung ist in Abbildung 62 zu sehen.

Da f als reguläres Flächenstück vorausgesetzt war, ist überall in B ein wohldefinierter Normalenvektor bestimmt; damit können wir auch für jedes der Rechtecke einen Umlaufsinn festlegen: Dieser soll, wenn man von der Spitze des Normalenvektors aus auf des Rechteck schaut, der Gegenuhrzeigersinn sein. Da der Normalenvektor eines regulären Flächenstücks stetig von den Parametern der Fläche abhängt und nirgends verschwindet, ist es gleichgültig, über welchem Punkt eines (hinreichend kleinen) Rechtecks wir ihn betrachten.

In Abbildung 62 wurde davon ausgegangen, daß alle Normalenvektoren nach oben zeigen; der entsprechende Umlaufsinn ist für einige der Rechteckkanten eingezeichnet. Wie man sieht, wird jede gemeinsame Kante zweier benachbarter Rechtecke von diesen beiden Rechtecken in verschiedener Weise orientiert. Falls wir daher für jedes Rechteck R_i das Wegintegral entlang seines Rands berechnen und alle diese Integrale aufaddieren, bleiben nur die Integrale längs der in Abbildung 62 fett ausgezogenen Kanten erhalten, d.h.

$$\sum_{i=1}^{M} \int_{\partial R_i} \vec{V}\,ds = \int_{\partial B^*} \vec{V}\,ds\,,$$

wobei M die Anzahl der „Rechtecke" R_i bezeichnet. Natürlich ist erst recht für jede Funktion h auf B^*

$$\sum_{i=1}^{M} \iint_{R_i} h\,dO = \iint_{B^*} h\,dO\,,$$

wenn wir eine Formel für die einzelnen Rechtecke R_i haben, gilt diese also automatisch auch für B^* und somit, nach einem Grenzübergang, auch für B.

Betrachten wir also ein festes Rechteck R_i und das Kurvenintegral entlang seines Umfangs. Da wir die Rechtecke als klein voraussetzen, können wir $\vec{V}(\boldsymbol{x})$ auf R_i ohne großen Fehler linearisieren.

Dazu sei $\boldsymbol{x}_i \in R_i$ ein beliebiger Punkt des Rechtecks. Ein beliebiger Punkt $\boldsymbol{x} \in R_i$ hat dann die Form $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i + \vec{h}$ mit einem nicht allzu großen Vektor $\vec{h}$. Nach Definition der Differenzierbarkeit ist dann

$$\begin{aligned}\vec{V}(\boldsymbol{x}) &= \vec{V}(\boldsymbol{x}_0 + \vec{h}) = \vec{V}(x_0) + J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}_0)\vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)\\ &= \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) + S\cdot\vec{h} + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\times h + o\big(|\vec{h}|\big)\,,\end{aligned}$$

wobei S für den symmetrischen Anteil der JACOBI-Matrix $J_{\vec{V}}(\boldsymbol{x}_0)$ steht. Wenn wir den Term $o\big(|\vec{h}|\big)$ vernachlässigen, ist also

$$\begin{aligned}\int_{\partial R_i} \vec{V}(\boldsymbol{x})\,ds &= \int_{\partial R} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0 + \vec{x})\,ds\\ &\approx \int_{\partial R} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\,ds + \int_{\partial R} S\vec{x}\,ds + \tfrac{1}{2}\int_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\times\vec{x}\,ds\,,\end{aligned} \tag{$*$}$$

wobei R das um den negativ genommenen Ortsvektor von $\boldsymbol{x}_0$ verschobene Rechteck R_i sei, d.h., wenn $\boldsymbol{x}$ den Rand von R durchläuft, durchläuft $\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}$ den Rand von R_i.

Das erste Integral in dieser Summe ist ein Kurvenintegral über das konstante Vektorfeld, das jedem Punkt den Vektor $\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)$ zuordnet. Dieses Vektorfeld ist offensichtlich ein Potentialfeld, denn sind V_1, V_2 und V_3 die Komponenten dieses Vektors, so ist

$$\operatorname{grad}\big(\vec{V}(\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{x}\big) = \operatorname{grad}(V_1x + V_2y + V_3z) = \vec{V}(x_0)\,.$$

Genauso ist auch $S\vec{h}$ ein Potentialfeld, denn der Gradient der quadratischen Form

$$\begin{aligned}{}^t\vec{x}S\vec{x} &= S_{11}x^2 + S_{22}y^2 + S_{33}z^2\\ &\quad + (S_{12}+S_{21})xy + (S_{13}+S_{31})xz + (S_{23}+S_{32})yz\end{aligned}$$

ist wegen $S_{k\ell} = S_{\ell k}$ gleich dem Zweifachen dieses Vektorfelds.

Damit sind also die beiden Vektorfelder $\vec{V}(x_0)$ und $S\vec{x}$ zirkulationsfrei, und die Integrale über den (als Kurve geschlossenen) Rand von R_i verschwinden.

Damit haben wir (bis auf die hier unterdrückten, für einen richtigen Beweis aber unbedingt notwendige Abschätzung der Fehlerterme) den folgenden Satz bewiesen:

Satz: Das Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ habe eine symmetrische JACOBI-Matrix, d.h. $\operatorname{rot}\vec{V}$ sei identisch null. Dann gilt für jedes reguläre Flächenstück $f: D \to G$, dessen Rand eine Kurve γ ist,

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = 0\,.$$

Denn nach obiger Rechnung verschwindet bei symmetrischer JACOBI-Matrix das Kurvenintegral entlang eines jeden Rechtecks, und die Summe all dieser Kurvenintegrale konvergiert bei immer feinerer Rechteckunterteilung des Flächenstücks gegen das Kurvenintegral längs des Rands γ von $B = f(D)$.

Dies reicht schon für den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung im $\mathbb{R}^3$: Wir wissen bereits, daß ein Vektorfeld genau dann eine Stammfunktion hat, wenn es zirkulationsfrei ist – die eine Richtung dieser Aussage haben wir gerade wieder angewandt. Außerdem wissen wir, daß für ein Vektorfeld mit Stammfunktion die Rotation verschwindet, denn für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion φ ist $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0$. Für ein leicht nachprüfbares Kriterium zur Existenz einer Stammfunktion fehlt also nur noch die Aussage, daß aus dem Verschwinden der Rotation die Zirkulationsfreiheit folgt.

Diese Aussage ist aber leider falsch: Das Beispiel des Magnetfelds eines stromdurchflossenen Leiters zeigte, daß die Rotation sehr wohl identisch verschwinden kann, ohne daß das Vektorfeld zirkulationsfrei ist. Dieses Magnetfeld $\vec{V}(x, y, z) = \frac{c}{x^2+y^2}\binom{-y}{x}$ ist allerdings auf der z-Achse nicht definiert, und wir hatten im Beispiel Kreise um die z-Achse betrachtet.

Bei einem überall definiertes Vektorfeld hätten wir für einen solchen Kreis einfach die geschlossene Kreisscheibe B betrachten können, deren Rand der betrachtete Integrationsweg ist, und nach obigem Satz wäre das Integral längs des Randes verschwunden.

Das Problem bei diesem Gegenbeispiel liegt also offensichtlich darin, daß der betrachtete Integrationsweg nicht als Rand eines regulären Flächenstücks im Definitionsbereich des Vektorfelds geschrieben werden kann: Da das Vektorfeld auf der z-Achse nicht definiert ist, muß der Schnittpunkt mit der z-Achse aus der Kreisscheibe herausgenommen werden, wir haben also nur noch einen punktierten Kreis, und dessen Rand besteht aus der Kreislinie *plus* dem herausgenommenen Punkt.

Um solche Fälle auszuschließen definieren wir:

Definition: Eine offene zusammenhängende Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt *einfach zusammenhängend,* wenn jede geschlossene Kurve γ in G Rand eines regulären Flächenstücks ist.

Anschaulich kann man dies auch so interpretieren, daß die Kurve innerhalb von G auf einen Punkt zusammengezogen werden kann: Man denke sich die Kurve als einen stark angespannten Gummiring; wenn man diesen auf ein Flächenstück legt, zieht er sich automatisch zusammen. Umgekehrt überstreicht der Ring beim Zusammenziehen auf einen Punkt ein Flächenstück, dessen Rand die Ausgangsposition des Gummis ist.

Mit dieser Definition gilt dann offensichtlich die folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung auf den $\mathbb{R}^3$:

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn $\operatorname{rot}\vec{V}$ dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist. ■

Für ein ebenes Vektorfeld gilt entsprechend

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^2$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^2$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn

$$\frac{\partial V_1}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial x}$$

dort identisch verschwindet, d.h. also, wenn die JACOBI-Matrix symmetrisch ist.

Beweis: Dies folgt sofort aus dem Satz von GREEN. ■

Auf höhere Dimension soll nicht genauer eingegangen werden; nur soviel sei erwähnt: Die eindeutige Bestimmtheit des Normalenvektors eines Flächenstücks im $\mathbb{R}^3$ hat in höheren Dimensionen keine Entsprechung mehr; dort muß man von einem Flächenstück explizit *fordern,* daß es orientierbar ist im folgenden Sinne: Man kann es durch kleine rechteckförmige Flächen überdecken und jedem dieser „Rechtecke" einen Umlaufsinn zuordnen derart, daß die gemeinsame Kante zweier Nachbarrechtecke von diesen beiden Rechtecken entgegengesetzt orientiert wird.

Wenn man dann den einfachen Zusammenhang einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ dadurch definiert, daß jede geschlossene Kurve in G Rand eines so orientierbaren Flächenstücks sein soll, was auch wieder im wesentlichen äquivalent ist zur Zusammenziehbarkeit der Kurve, gilt auch hier der

Satz: Ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^n$ auf einer einfach zusammenhängenden Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ hat genau dann eine Stammfunktion, wenn die JACOBI-Matrix von $\vec{V}$ symmetrisch ist. ∎

Damit genug zum ersten der drei Hauptsätze dieses Paragraphen; wir machen weiter, wo wir vor der Spezialisierung auf symmetrische Vektorfelder aufgehört haben und folgern, daß nach $(*)$ für ein beliebiges differenzierbares Vektorfeld gilt

$$\int_{\partial R_i} \vec{V}(\boldsymbol{x})\,ds \approx \tfrac{1}{2}\int_{\partial R} \operatorname{rot}\vec{V}(\boldsymbol{x}_0) \times \vec{x}\,ds\,;$$

wir müssen uns also dieses Integral genauer ansehen. Dabei setzen wir zur Abkürzung

$$\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{V}(x_0)\,;$$

dann ist der Integrand

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{x}) \cdot ds\,.$$

Nach Definition eines Kurvenintegrals ist das Integral hierüber Grenzwert einer Summe von Termen der Art

$$\tfrac{1}{2}(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j\,,$$

wobei $\boldsymbol{x}_j$ Punkte auf der Kurve sind und t_j die Tangentenvektoren in diesen Punkten. Dieses Skalarprodukt eines Vektorprodukts mit einem Vektor ist bekanntlich das *Spatprodukt,* und es ist gleich der Determinante mit den Spaltenvektoren $\vec{a}, \vec{x}_j$ und t_j. Diese Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei Spalten vertauscht; tut man dies zweimal, kehrt sie wieder zu ihrem alten Wert zurück. Daher ist

$$(\vec{a} \times \vec{x}_j) \cdot \vec{t}_j = (\vec{x}_j \times \vec{t}_j) \cdot \vec{a}\,.$$

Der Vektor $\vec{x}_j \times \vec{t}_j$ steht senkrecht auf $\vec{x}_j$ und auf $\vec{t}_j$; falls wir also von einem *flachen* Rechteck ausgehen, steht er auch senkrecht auf diesem und hat somit die Richtung des Normalenvektors. Sein Betrag ist gleich der Fläche des von $\vec{x}_j$ und $\vec{t}_j$ aufgespannten Parallelogramms, die Hälfte davon also gleich der Fläche des von diesen beiden Vektoren aufgespannten Dreiecks. Die Summe aller dieser Dreiecksflächen

ist im Limes gleich der Fläche des Rechtecks, über dessen Rand wir integrieren, also ist das Integral über den Rand des Rechtecks für kleine Rechtecke näherungsweise gleich einem Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{a}$, wobei $\vec{n}$ als Länge den Flächeninhalt des Rechtecks hat und als Richtung die des Normalenvektors. Als Grenzwert einer Summe solcher Skalarprodukte ist aber gerade das Integral

$$\iint_f \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O}$$

erklärt; wenn wir immer feinere Rechteckunterteilungen betrachten, konvergiert die Summe der Kurvenintegrale über die Ränder dieser Rechtecke also einerseits gegen das Kurvenintegral des Vektorfelds über den Rand γ des betrachteten Flächenstücks, andererseits aber auch gegen das Integral der Rotation von $\vec{V}$ über das Flächenstück selbst. Dies ist der

Satz von Stokes: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^3$. Weiter sei $f: D \to G$ ein reguläres Flächenstück mit einer stückweise regulären Kurve γ als Rand. Dann ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \iint_f \operatorname{rot}\vec{V}\,d\vec{O}\,.$$

GEORGE GABRIEL STOKES (1819–1903) wurde in Irland geboren als jüngster von sechs Söhnen eines protestantischen Pfarrers. Nach dem Tod seines Vaters kam er im Alter von 16 Jahren an eine Schule nach Bristol in England und begann zwei Jahre später sein Studium an der Universität Cambridge. Er wurde vor allem bekannt durch seine Arbeiten zur mathematischen Physik, für die er viele mathematische Techniken entwickelte. Er gilt als der Begründer sowohl der Strömungslehre als auch der Geodäsie und hatte unter anderem großen Einfluß auf die Entwicklung von MAXWELL. Ab 1849 lehrte er als Professor an der Universität Cambridge.

Aus dem Satz von STOKES können wir eine neue Charakterisierung der Rotation herleiten:

Satz: $\vec{V}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld, $\vec{e}$ ein Einheitsvektor, und $\gamma_{\vec{e},r}$ ein Kreis mit Radius r um $\boldsymbol{x}_0$ ist, der in einer Ebenen senkrecht zu $\vec{e}$ liege und von $\vec{e}$ aus gesehen im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werde; die gesamte von $\gamma_{\vec{e},r}$ berandete Kreisscheibe liege in G. Dann ist

$$\operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\pi r^2} \int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V}\, d\vec{s}\,.$$

Beweis: $\gamma_{\vec{e},r}$ ist Rand einer Kreisscheibe D vom Radius r mit Flächeninhalt πr^2; nach dem Satz von STOKES ist

$$\int\limits_{\gamma_{\vec{e},r}} \vec{V}\, d\vec{s} = \iint\limits_D \operatorname{rot} \vec{V}\, d\vec{O} = \iint\limits_D (\operatorname{rot} \vec{V}) \cdot \vec{e}\, dO\,,$$

und für immer kleiner werdende Werte von r stimmt dies immer besser überein mit $\operatorname{rot} \vec{V}(\boldsymbol{x}_0) \cdot \vec{e}$ mal dem Flächeninhalt der Kreisscheibe. ■

Falls die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind, falls also insbesondere die Kreislinie Rand einer im Definitionsbereich von $\vec{V}$ enthaltenen Fläche ist, läßt sich die Rotation somit als Limes einer Art „normierter“ Zirkulation auffassen, d.h. als Integral längs einer geschlossenen Kurve dividiert durch die Länge dieser Kurve. Die Rotations gibt also auch ein Maß für die Abweichung eines Vektorfelds von der Zirkulationsfreiheit.

Damit wäre auch der zweite Hauptsatz dieses Abschnitts bewiesen; bleibt noch der

Satz von Gauß: $\vec{W}: G \to \mathbb{R}^3$ sei ein differenzierbares Vektorfeld und $f: D \to G$ sei ein reguläres Flächenstück derart, daß $B = f(D)$ Rand eines beschränkten dreidimensionalen Bereichs V sei. Dann ist

$$\iint\limits_f \vec{W}\, d\vec{O} = \iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{W}\, dx\, dy\, dz\,.$$

Bemerkung: Der Satz gilt auch, mit den offensichtlichen Definitionen, falls der Rand von V kein Flächen*stück* ist, sondern eine Fläche, die aus endlich vielen regulären Stücken zusammengesetzt ist. Am Beweis

ändert sich dabei abgesehen vom größeren Schreibaufwand praktisch nichts.

Der *Beweis* des Satzes von GAUSS beruht auf derselben Idee wie der des Satzes von STOKES: Dort hatten wir ein Flächenstück durch Rechtecke angenähert, um das Kurvenintegral längs seines Randes zu einem Integral über das Flächenstück in Beziehung zu setzen; hier unterteilen wir entsprechend das Volumen V in kleine, der Einfachheit halber als achsenparallel vorausgesetzte Quader, um das Oberflächenintegral über den Rand von V mit einem Integral über V in Beziehung zu setzen.

Ein solcher Quader sei Q_i, und $\vec{h}, \vec{k}, \vec{\ell}$ seien die drei Kantenvektoren von Q_i in Richtung der x-, y- und z-Achse. Dann ist das Integral von $\vec{W}$ über die Oberfläche von Q_i gleich

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{W}\, d\vec{O} = \iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\\text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\\text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\\text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O}\,,$$

und weiter ist beispielsweise

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\\text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} &= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\\text{Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O} + \iint\limits_{\substack{\text{rechte}\\\text{Seitenfläche}}} \vec{W}\, d\vec{O}\\ &= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\\text{Seitenfläche}}} \vec{W}(\boldsymbol{x})\, d\vec{O} - \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\\text{Seitenfläche}}} \vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h})\, d\vec{O}\\ &= -\iint\limits_{\substack{\text{linke}\\\text{Seitenfläche}}} \big(\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \vec{W}(\boldsymbol{x})\big)\, d\vec{O}\,,\end{aligned}$$

denn da alle Normalenvektoren nach außen zeigen, sind die linke und die rechte Seite des Quaders verschieden orientiert.

Nun kommt die Differenzierbarkeit von $\vec{W}$ ins Spiel und sagt uns, daß

$$\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = \vec{W}(\boldsymbol{x}) + J_{\vec{W}}(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)$$

ist. Da der Vektor $\vec{h}$ in Richtung der x-Achse zeigt, können wir das (mit

$h = \left|\vec{h}\right|$) auch einfacher schreiben als

$$\vec{W}(x+h,y,z) = \vec{W}(x,y,z) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{W}\right) \cdot h + o(h)\,,$$

wobei die partielle Ableitung von $\vec{W}$ nach x für jenes Vektorfeld stehen soll, dessen Komponenten die partiellen Ableitungen der entsprechenden Komponenten von $\vec{W}$ sind. Da wir in diesem Semester noch viel zu tun haben, vernachlässigen wir den Term $o(h)$ in der Hoffnung, daß er für immer feiner werdende Unterteilungen trotz der dann ansteigenden *Anzahl* dieser Terme keine Rolle mehr spielen wird.

In der Tat sollte ein mit den Abschätzungstechniken aus der Analysis I vertrauter Leser keine Schwierigkeiten haben, dies mathematisch streng zu zeigen. Die Heuristik, nach der man dabei vorgeht, ist (hoffentlich) klar: Die Anzahl aufeinanderliegender Quader in Richtung der x-Achse ist proportional zu $1/\,|\vec{h}|$, und $1/\,|\vec{h}|$ Terme der Größenordnung $o(|\vec{h}|$ addieren sich zu einem Term der Größenordnung $o(1)$, d.h. zu einer Funktion, die gegen Null geht. (Die Aussage „geht schneller als 1 gegen Null" ist natürlich gleichbedeutend damit, daß die Funktion überhaupt gegen Null geht.)

Der Einheitsnormalenvektor der linken Seite des Quaders zeigt in Richtung der negativen x-Achse, denn die linke Seite ist parallel zur (y,z)-Ebene und zeigt nach außen. Wenn wir den Einheitsvektor der x-Achse mit $\vec{e}_x$ bezeichnen, ist daher

$$d\vec{O} = -\vec{e}_x\,dy\,dz$$

und damit

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx -\iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \big(\vec{W}(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \vec{W}(\boldsymbol{x})\big)\,d\vec{O}\,,$$

$$= \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} h \cdot \frac{\partial}{\partial x}\vec{W} \cdot \vec{e}_x = h \cdot \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial V_1}{\partial x} \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dx\,dy$$

$$= h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x}\,dy\,dz\,.$$

Ganz entsprechend ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx k \iint\limits_{\substack{\text{vordere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_2}{\partial y}\,dx\,dz$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx \ell \iint\limits_{\substack{\text{obere}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_3}{\partial z}\,dx\,dy\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz für Flächenintegrale können wir diese Integrale weiter abschätzen: Es gibt Punkte ξ auf der linken, η auf der vorderen und ζ auf der unteren Seitenfläche, so daß

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx h \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} \frac{\partial V_1}{\partial x}\,dy\,dz$$

$$= h\frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi) \iint\limits_{\substack{\text{linke}\\ \text{Seitenfläche}}} dy\,dy = hkl\frac{\partial V_1}{\partial x}(\xi)\,.$$

Genauso ist

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_2}{\partial y}(\eta)$$

und

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_3}{\partial z}(\zeta)\,.$$

Nun ist es wieder an der Zeit, eine etwas komplexere Abschätzung unter den Tisch fallen zu lassen: Die Punkte ξ, η und ζ liegen auf den Seitenflächen eines Quaders, der immer kleiner werden soll. Damit rücken auch diese Punkte immer weiter zusammen und wir sollten wohl keinen allzu großen Fehler machen, wenn wir einfach *irgendeinen* Punkt $\boldsymbol{x}_i$ im Quader Q_i auswählen und sowohl ξ, η als auch ζ durch diesen Punkt ersetzen; die formale Rechtfertigung hierfür geht wieder aus von der Differenzierbarkeit des Vektorfelds V und beruht im übrigen auf Abschätzungen.

Wenn wir das alles glauben, ist also

$$\iint\limits_{\substack{\text{linke und}\\ \text{rechte Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i)\,,$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{vordere und}\\ \text{hintere Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) \quad \text{und}$$

$$\iint\limits_{\substack{\text{obere und}\\ \text{untere Seitenfläche}}} \vec{W}\,d\vec{O} \approx hkl\frac{\partial V_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}_i)\,.$$

Das Oberflächenintegral über die gesamte Quaderoberfläche ist die Summe dieser drei Teilintegrale, und da bekanntlich

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(\boldsymbol{x}_i) + \frac{\partial V_3}{\partial z}(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{div}\vec{W}(\boldsymbol{x}_i)$$

ist, haben wir somit gezeigt, daß

$$\iint\limits_{\partial Q_i} \vec{W}\,d\vec{O} \approx hkl\,\operatorname{div}\vec{W}(\boldsymbol{x}_i) = \operatorname{div}\vec{W}(\boldsymbol{x}_i)\cdot vol(Q_i) \qquad (*)$$

ist.

Damit haben wir eine lokale Version des Satzes von GAUSS gezeigt; zum Beweis des Satzes selbst nähern wir das Volumen V an durch die Quader Q_i. Dann ist

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{W}\,dx\,dy\,dz \approx \sum_i \operatorname{div}\vec{W}(\boldsymbol{x}_i)\cdot vol(Q_i)\,,$$

und wenn wir die Quader immer weiter verkleinern, wird im Limes aus dem Ungefährzeichen ein Gleichheitszeichen – genau so hatten wir schließlich Volumenintegrale definiert.

Im Falle des Integrals über die Randfläche $B = f(D)$ von V ist die Situation etwas komplizierter: Wie beim Beweis des Satzes von STOKES überlegt man sich zunächst leicht, daß eine gemeinsame Seitenfläche zweier benachbarter Quader von den beiden Quadern verschieden orientiert wird, so daß sich die beiden Integrale über diese Fläche gegenseitig

aufheben; die Summe über alle Oberflächenintegrale über die Q_i ist also gleich der Summe über alle Oberflächenintegrale über jene Seitenflächen von Quadern Q_i, die nur Seitenfläche eines einzigen Quaders sind, d.h. also über die Randfläche der Vereinigung aller Quader Q_i.

Die Quaderflächen, die diesen Rand ausmachen, sind allesamt parallel zu Koordinatenebenen; ihre Normalenvektoren sind also parallel zu Koordinaten*achsen,* wohingegen die Normalenvektoren von B natürlich beliebige Richtungen haben können. Wir müssen uns überlegen, warum die Integrale im Limes trotzdem gleich sein können.

Der Integrand bei einem Oberflächenintegral über ein Vektorfeld ist das Skalarprodukt aus dem Normalenvektor von B im jeweils betrachteten Punkt und dem Wert $\vec{W}(\boldsymbol{x})$ des Vektorfelds in diesem Punkt. Konkret sei etwa $\vec{n}$ der Normalenvektor im Punkt $\boldsymbol{x} \in B$, und in Koordinaten sei

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{W}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\vec{W}(\boldsymbol{x})\cdot\vec{n} &= v_1n_1 + v_2n_2 + v_3n_3\\ &= \vec{W}(\boldsymbol{x})\cdot(n_1\vec{e}_1) + \vec{W}(\boldsymbol{x})\cdot(n_2\vec{e}_2) + \vec{W}(\boldsymbol{x})\cdot(n_3\vec{e}_3)\,;\end{aligned}$$

wir erhalten also dasselbe Skalarprodukt auch, indem wir $\vec{W}(\boldsymbol{x})$ nacheinander mit geeigneten Normalenvektoren von Quaderflächen parallel zu den Koordinatenebenen multiplizieren und die Ergebnisse aufaddieren.

Falls $\vec{n}$ drei nichtverschwindende Komponenten hat, ist klar, daß die Fläche B in der Nähe von $\boldsymbol{x}$ nur so durch Quader angenähert werden kann, daß es dort freie Randflächen parallel zu allen drei Koordinatenebenen gibt; ein nicht allzu schwieriges Argument über den Satz von PYTHAGORAS zusammen mit Limesbetrachtungen zeigt, daß auch mit den Längen alles gut geht, so daß auch das Oberflächenintegral über B gleich der Summe der Integrale über die Quaderoberflächen ist.

Wie wir oben gesehen haben, ist der Satz für einen einzelnen Quader richtig; da auf beiden Seiten das Integral durch Summen entsprechender

Integrale für Quader angehähert werden kann, ist also der Satz von GAUSS (modulo zahlreicher Auslassungen) bewiesen. ■

Genau wie der Satz von STOKES zu einer alternativen Definition der Rotation führte, kann mit dem Satz von GAUSS die *Divergenz* auf andere Weise ausgedrückt werden; zumindest für Quader haben wir die entsprechende Formel im gerade beendeten Beweis als Formel $(*)$ bereits hergeleitet:

Satz: Für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{W}\colon G \to \mathbb{R}^3$ ist

$$\operatorname{div} \vec{W}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{r\to 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint\limits_{\partial B_r} \vec{W}\, d\vec{O}\,,$$

wobei B_r eine Kugel mit Radius r um $\boldsymbol{x}_0$ ist, deren Normalenvektoren nach außen zeigen.

Beweis: Nach dem Mittelwertsatz ist das Volumenintegral über B_r gleich dem Produkt des Volumens $\frac{4}{3}\pi r^3$ von B_r mit dem Wert des Integranden $\operatorname{div} \vec{W}$ an einem geeigneten Punkt der Kugel. Falls r gegen Null geht, muß dieser Punkt immer näher an den Mittelpunkt der Kugel rücken, bis er im Limes mit diesem zusammenfällt. ■

Auch der Satz von GAUSS läßt sich wieder anschaulich interpretieren: Bei der Definition der Divergenz haben wir uns bereits überlegt, daß diese mißt, inwieweit ein Punkt eher eine Quelle oder eine Senke für ein Vektorfeld ist. Da das Oberflächenintegral gerade gleich dem Fluß des Vektorfelds durch die betrachtete Oberfläche ist und wir die Oberfläche so orientiert haben, daß der Normalenvektor nach außen zeigt, sagt der Satz von GAUSS also einfach, daß der gesamte Fluß einer Vektorfelds durch die Oberfläche eines Volumens V genau das ist, was im Innern von V erzeugt oder (bei negativen Vorzeichen auf beiden Seiten) vernichtet wird.

Der obige Satz zur Charakterisierung der Divergenz zeigt dementsprechend noch einmal, warum die Divergenz auch als *Quellendichte* bezeichnet wird: Nach dem Satz von GAUSS ist der Fluß durch die Oberfläche einer Kugel gleich der Summe des im Innern erzeugten oder

vernichteten; dividiert man dies durch das Volumen der Kugel, entsteht die Quellen*dichte,* deren Grenzwert für immer kleiner werdende Kugeln gleich der Divergenz ist.

§7: Grundzüge der Fehler- und Ausgleichsrechnung

Physikalische Gesetze machen meist nur dann eine Aussage über ein reales System, wenn alle Umgebungsbedingungen exakt kontrolliert werden können. Das ist in der Praxis natürlich nie möglich. Insbesondere hat man bei der Anwendung physikalischer Prinzipen zur Messung von Daten keine Chance, den exakten Wert der zu messenden Größe zu bestimmen; der gemessene Wert wird immer von zahlreichen kleineren Störungen beeinflußt sein, die man bei einem gut durchgeführten Experiment für alle praktischen Zwecke als zufällig betrachten kann.

Zusätzlich kann die Messung noch durch mehr oder weniger große *systematische* Fehler verfälscht sein; diese können hervorgerufen werden durch ein falsch kalibriertes Meßgerät, Ablesen auf der falschen Skala eines Meßinstruments, durch falsche Anwendung von Meßvorschriften *usw.* Mit diesen systematischen Fehlern wollen wir uns hier nicht beschäftigen; in diesem Paragraphen soll es nur um *Zufallsfehler* gehen.

a) Das Laplacesche Fehlermodell

Der französische Mathematiker PIERRE SIMON, MARQUIS DE LAPLACE (1749–1827), dem wir in dieser Vorlesung bereits mehrfach begegnet sind, entwickelte ein extrem vereinfachtes Modell für das Zustandkommen zufälliger Meßfehler. Trotz seiner unrealistischen Annahmen ist es auch für die Praxis immer noch sehr interessant, da man inzwischen weiß, daß auch sehr viel kompliziertere realistische Fehlerquellen dasselbe Verhalten zeigen, das LAPLACE aus seinem Modell ableitete.

Die Grundannahme des LAPLACEschen Fehlermodells können wir uns so vorstellen, daß eine große Anzahl von „Dämonen“ (oder Fehlerquellen) unsere Meßergebnisse verfälschen; jeder einzelne dieser „Dämonen“ verursacht einen Fehler derselben Größe ε in positiver oder negativer Richtung, wobei die Wahrscheinlichkeit für $+\varepsilon$ *bzw.* $-\varepsilon$ für jeden der „Dämonen“ jeweils 50% sein soll und die einzelnen „Dämonen“ unabhängig voneinander handeln sollen.

Im Falle eines einzigen „Dämonen“ wäre der Fehler also mit gleicher Wahrscheinlichkeit $+\varepsilon$ oder $-\varepsilon$, bei zwei „Dämonen“ wäre er in jeweils 25% aller Fälle $+2\varepsilon$ oder -2ε, während sich in 50% der Fälle die beiden Fehler aufheben würden.

Allgemein gibt es bei n „Dämonen“ 2^n gleichwahrscheinliche Möglichkeiten für deren Verhalten; die folgende Tabelle zeigt für $n \leq 5$ jeweils die Anzahl der Fälle, die zu dem in der Kopfzeile angegebenen Gesamtfehler führen:

	-5ε	-4ε	-3ε	-2ε	$-\varepsilon$	0	$+\varepsilon$	$+2\varepsilon$	$+3\varepsilon$	$+4\varepsilon$	$+5\varepsilon$
$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

Diese dreiecksförmige Anordnung von Zahlen bezeichnet man als PASCAL*sches Dreieck.* Offenbar kann man es dadurch rekursiv zeilenweise berechnen, daß man an jede Stelle die Summe der beiden links und rechts darüberstehenden Zahlen schreibt: Die n-te Störung bringt den Fehler genau dann auf $i \cdot \varepsilon$, wenn sie entweder gleich $+\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i-1) \cdot \varepsilon$ produziert haben, oder aber wenn sie gleich $-\varepsilon$ ist und die ersten $n-1$ Störungen einen Fehler $(i+1) \cdot \varepsilon$ produziert haben. Entsprechend ist auch klar, daß die Summe aller Zahlen in der n-ten Zeile gleich 2^n ist, denn in der nullten Zeile haben wir Summe eins, und da die jeweils neu hinzukommende Störung genau zwei Möglichkeiten hat, verdoppelt sich die Summe von Zeile zu Zeile. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich n Störungen zu $i \cdot \epsilon$ aufsummieren, ist also gerade gleich der Zahl, die in der n-ten Spalte unter $i \cdot \varepsilon$ steht (beziehungsweise Null, wenn dort keine Zahl steht), dividiert durch 2^n.

Bekanntlich kann man die Zahlen in diesem Dreieck auch explizit be-

rechnen: An der n-ten Zeile stehen die $n+1$ Zahlen

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \quad \text{für} \quad i = 0, \dots, n\,.$$

Wer diese Formel nicht kennt, kann sie leicht durch vollständige Induktion beweisen: Für $n = 1$ sowie allgemein für $i = 0$ oder $i = n$ ist alles klar; für $n > 1$ und $0 < i < n$ stehen über $\binom{n}{i}$ die beiden Zahlen $\binom{n-1}{i-1}$ und $\binom{n-1}{i}$, für die in der Tat gilt

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i} &= \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} + \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} = \frac{(n-1)!}{i!(n-i)!} \cdot \Bigl(i + (n-i)\Bigr) \\ &= \frac{n!}{i!(n-i)!} = \binom{n}{i}\,.\end{aligned}$$

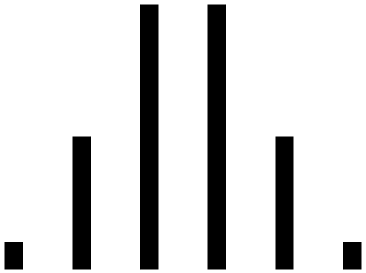
Mit dieser Formel lassen sich die Fallanzahlen für einen bestimmten Fehler im Prinzip berechnen; allerdings ist die Berechnung für große n schnell sehr aufwendig und die Binomialkoeffizienten werden auch schnell sehr groß. Um trotzdem einen Eindruck davon zu bekommen, was für größere n passiert, sind auf den beiden folgenden Seiten die Binomialkoeffizienten für $n = 5, 10, 50, 100, 500$ und 1000 graphisch dargestellt. (Die Tatsache, daß ab $n = 50$ deutlich weniger als $n+1$ Balken zu sehen sind, erklärt sich daraus, daß die restlichen Binomialkoeffizienten zu klein sind, um noch darstellbar zu sein: Die Diagramme sind so skaliert, daß der größte (mittlere) Balken jeweils eine feste Höhe hat.)

Betrachten wir als nächstes die Gröse des Gesamtfehlers. Falls n gerade ist, treten nur Vielfache von 2ε auf und alle diese Vielfachen zwischen $-n\varepsilon$ und $n\varepsilon$ kommen tatsächlich vor; ensprechend sind für ungerades n nur ungeradzahlige Vielfache von ε möglich, und auch hier werden wieder alle solchen Werte zwischen $-n\varepsilon$ und $n\varepsilon$ angenommen. Wir können dies dadurch zusammenfassen, daß in beiden Fällen genau die Werte $(n-2k)\varepsilon$ mit $k = 0, \dots, n$ angenommen werden, und das PASCALsche Dreieck zeigt, daß der Fehler $(n-2k)\varepsilon$ in

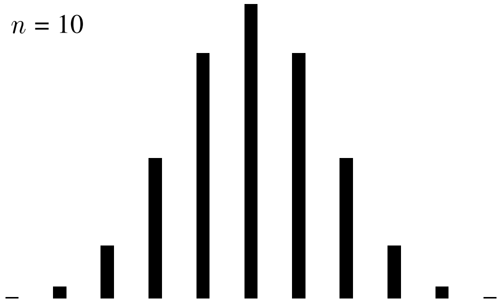
$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Fällen auftritt. Da n „Dämonen“ insgesamt 2^n Möglichkeiten zur Fehlererzeugung haben, ist die Wahrscheinlichkeit für den Gesamtfeh-

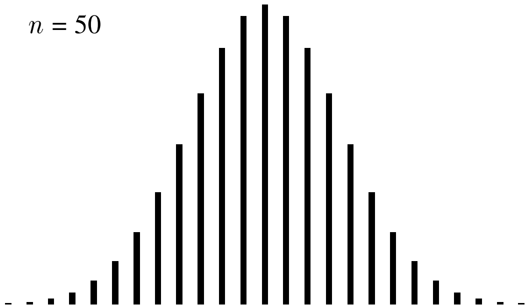
$n = 5$



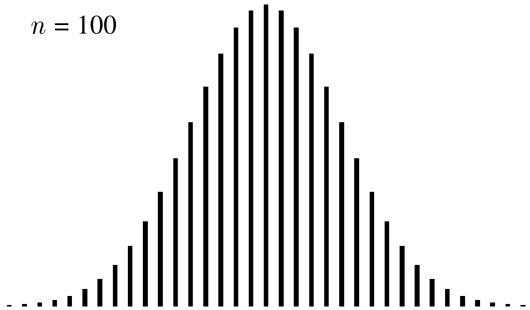
$n = 10$



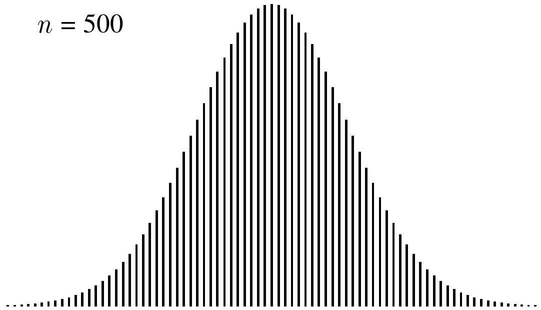
$n = 50$



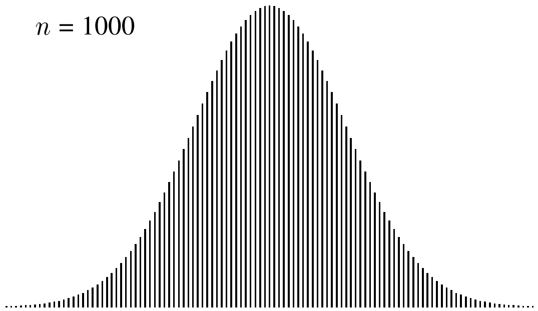
$n = 100$



$n = 500$



$n = 1000$



ler $(n-2k)\varepsilon$ also

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{-n} .$$

Diese Wahrscheinlichkeit sollte für einen festen Fehlerbetrag im wesentlichen unabhängig von n sein: Da wir nicht wirklich an Dämonen glauben, können wir deren Anzahl schließlich nicht in ein realistisches Fehlermodell einfließen lassen.

Auch die Balkendiagramme zeigen, daß sich die Verteilung der Fehlerwahrscheinlichkeiten für große n einer festen Kurve annähern sollte, der in Abbildung 63 und auf jedem Zehnmarkschein zu findenden *Glockenkurve* oder GAUSS-Kurve.

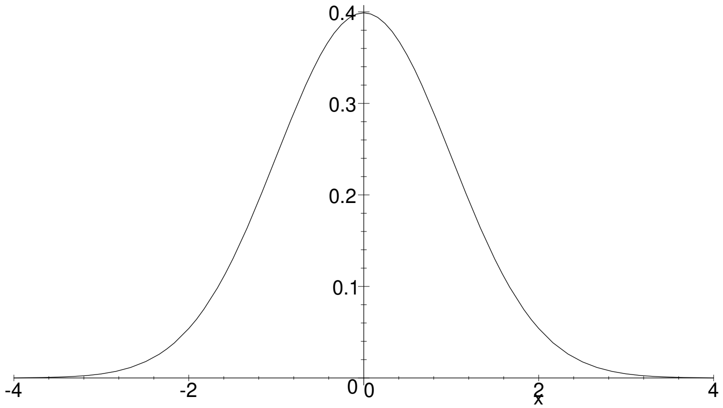


Abb. 63: Die „Glockenkurve“ $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Wenn sich Fehler oder auch beliebige Daten so veteilen, wie es dieser Kurve entspricht, redet man von *normalverteilten* Daten. Damit haben wir also zumindest graphisch gesehen, daß Meßfehler nach dem LAPLACEschen Fehlermodell normalverteilt sind. Das sagt noch nicht unbedingt etwas über die Verteilung realer Meßfehler, da das LAPLACEsche Fehlermodell von unrealistisch einfachen Annahmen ausgeht; nach einem der fundamentale Gesetze der Statistik, dem *zentralen*

Grenzwertsatz, führen aber auch realistischere Annahmen zu genau derselben Verteilung: Sind $u_1, \dots, u_n$ beliebige Quellen von Zufallsfehlern, über deren Verteilung wir (fast) nichts voraussetzen müssen, so ist ihre Summe für hinreichend großes n annähernd normalverteilt. Das eingeklammerte Wort „fast“ ist dabei für praktische Zwecke bedeutungslos, und als „groß“ kann man sich ein n ab etwa dreißig oder vierzig vorstellen.

Im Anhang zu diesem Paragraphen werden wir uns überlegen, wie man zu einer Gleichung für die Glockenkurve kommt.

b) Statistische Kenngrößen

Die übliche Strategie zum Umgang mit Zufallsfehlern ist wohlbekannt: Man begnügt sich nicht mit einer einzigen Messung, sondern mißt dieselbe Größe mehrmals, so daß man eine ganze Meßreihe

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

erhält. Dann bildet man das *arithmetische Mittel*

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

der Meßreihe in der Hoffnung, daß sich hierbei die Fehler „ausmitteln“, so daß $\overline{x}$ dem theoretisch korrekten Wert $\hat{x}$ nahekommt.

Die Wahl des arithmetischen Mittels läßt sich auch geometrisch begründen: Eine Meßreihe $x_1, \dots, x_N$ für eine Meßgröße mit exaktem Wert $\hat{x}$ definiert einen Vektor im $\mathbb{R}^n$. Falls es keine Meßfehler gäbe, hätte dieser lauter identische Komponenten $\hat{x}$. Tatsächlich ist dies natürlich nicht der Fall; wir können aber nach einem Vektor mit identischen Komponenten suchen, der möglichst nahe am Vektor der Meßwerte liegt. Für einen Vektor, dessen sämtliche Komponenten gleich x sind, ist der EUKLIDische Abstands zum Vektor der Meßwerte gleich

$$d(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x - x_i)^2} = \sqrt{Nx^2 - 2x \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i^2} .$$

Die quadratische Funktion $d(x)^2$ hat ein eindeutig bestimmtes Minimum bei der Nullstelle ihrer Ableitung

$$2Nx - 2\sum_{i=1}^{N} x_i \,,$$

also beim arithmetischen Mittel $\overline{x}$, und dieses ist auch das einzige Minimum von $d(x)$. Wir nehmen daher das arithmetische Mittel $\overline{x}$ als besten verfügbaren Schätzwert für den unbekannten korrekten Wert $\hat{x}$.

Als Maß für die Schwankungen innerhalb der Meßreihe und damit für die Meßfehler könnte man versucht sein, den Abstand $d(\hat{x})$ zu nehmen; er hat aber den Nachteil, daß er mit steigendem N immer größer wird, d.h. die Schwankungen würden umso größer, je mehr man mißt. Das ist natürlich absurd; daher dividieren wir das Abstandsquadrat noch durch N und definieren die *mittlere quadratische Abweichung* oder *Varianz* der Meßreihe als

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\hat{x} - x_i)^2 \,.$$

Die (nichtnegative) Quadratwurzel σ hieraus heißt *Standardabweichung* der Meßreihe.

Das Ergebnis einer Messung wird meist angegeben in der Form

$$x = \overline{x} \pm \sigma \,,$$

man betrachtet also die Standardabweichung der Meßreihe als Maß für den Meßfehler. Da deren Definition allerdings vom (im allgemeinen unbekannten) korrekten Wert $\hat{x}$ abhängt, können wir sie nicht berechnen, sondern müssen im folgenden sehen, wie wir sie zumindest schätzen können.

Als einfachste Möglichkeit bietet sich an, σ^2 durch

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\overline{x} - x_i)^2$$

zu schätzen, aber das führt sicherlich zu einem zu kleinen Ergebnis: Schließlich ist $d(\overline{x})$ das eindeutig bestimmte Minimum der Abstandsfunktion d, so daß der korrekte Wert $d(\hat{x})$ für $\hat{x} \neq \overline{x}$ notwendigerweise größer sein muß.

In Abschnitt *d)* werden wir aus dem Fehlerfortpflanzungsgesetz einen besseren Schätzwert für σ herleiten.

Warum betrachten wir eigentlich quadratische Abweichungen und nicht die einfacheren linearen Abweichungen? Nun, der Mittelwert aller Abweichungen ist

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i - \frac{1}{N}N\overline{x} = \overline{x} - \overline{x} = 0 \,,$$

also ist dies keine geeignete Maßzahl. Möglich wäre die mittlere *betragsmäßige* Abweichung

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|x_i - \overline{x}| \,,$$

allerdings wird die im allgemeinen nicht für das arithmetische Mittel $\bar{x}$ minimal, sondern, wie man sich leicht überlegen kann, für jede Zahl $\overline{x}$ mit der Eigenschaft, daß gleichviele Meßwerte größer und kleiner als $\overline{x}$ sind; einen solchen Wert $\overline{x}$ bezeichnet man als *Median* der Meßreihe. Für die Beschreibung wirtschafts- und sozialwissenschaftlicher Daten ist dieser Median meist eine aussagekräftigere Kennzahl als das arithmetische Mittel; in den Naturwissenschaften und der Technik spielt er allerdings keine große Rolle. Im Anhang zu diesem Paragraphen werden wir sehen, daß auch das LAPLACEsche Fehlermodell in natürlicher Weise auf quadratische Abweichungen führt.

c) Das Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben seien zwei Größen

$$x = \hat{x} \pm \sigma_x \quad \text{und} \quad y = \hat{y} \pm \sigma_y$$

(die Verallgemeinerung auf mehr als zwei Größen erfordert, wie man sich bei der folgenden Rechnung leicht klarmacht, nur etwas mehr Schreibaufwand; sie ist nicht prinzipiell schwieriger), und eine Größe

$$w = f(x, y) \,,$$

die von diesen beiden abhängt. Um vernünftige Aussagen machen zu können, setzen wir dabei f als stetig differenzierbar voraus.

Für x seien n Meßwerte $x_1, \ldots, x_n$ gegeben, und für y entsprechend m Werte $y_1, \ldots, y_m$. Wenn wir echte Zufallsfehler haben, können wir davon ausgehen, daß die Fehler der x-Werte und die der y-Werte voneinander unabhängig sind, und das wollen wir im folgenden auch annehmen.

Für w haben wir dann $n \cdot m$ Werte $w_{ij} = f(x_i, y_j)$, deren Mittelwert die beste Schätzung für den „wahren“ Wert $\widehat{w} = f(\hat{x}, \hat{y})$ ist. Dieser Mittelwert ist für komplizierte Funktionen f und/oder große Werte von n und m umständlich auszurechnen; günstiger wäre es, einfach den Mittelwert $\bar{x}$ der x_i und den Mittelwert $\bar{y}$ der y_j zu berechnen, um dann $f(\bar{x}, \bar{y})$ als Schätzung für $\widehat{w}$ zu benutzen. Zur Abschätzung des dadurch bedingten Fehler setzen wir

$$x_i = \bar{x} + h_i \quad \text{und} \quad y_j = \bar{y}_j + k_j\,;$$

dann ist wegen der Differenzierbarkeit von f

$$\begin{aligned} w_{ij} &= f(x_i, y_j) = f(\bar{x} + h_i, \bar{y} + k_j) \\ &= f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})h_i + f_y(\bar{x}, \bar{y})k_j + o\left(\sqrt{h_i^2 + k_j^2}\right), \end{aligned}$$

wobei

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f \quad \text{und} \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f$$

die partiellen Ableitungen von f bezeichnen. Da die h_i und die k_j als Abweichungen vom Mittelwert die Summe null haben, ist also der Mittelwert der w_{ij} bis auf einen Fehler der Größenordnung $o\left(\sqrt{h_i^2 + k_j^2}\right)$ gleich $f(\bar{x}, \bar{y})$.

Als nächstes müssen wir den Fehler von $\widehat{w}$ berechnen, also den Erwartungswert der $(w_{ij} - \widehat{w})^2$. Dazu schreiben wir zunächst

$$x_i = \hat{x} + u_i \quad \text{und} \quad y_j = \hat{y}_j + v_j\,,$$

betrachten also anstelle der Abweichungen vom Mittelwert die echten Meßfehler, und erhalten genau wie eben

$$w_{ij} - \widehat{w} = f(x_i, y_j) - f(\hat{x}, \hat{y}) \approx u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\,,$$

also

$$\begin{aligned} (w_{ij} - \widehat{w})^2 &\approx \left(u_i \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) + v_j \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\right)^2 \\ &= u_i^2 \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 + v_j^2 \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 + 2u_i \cdot v_j \cdot f_x(\hat{x}, \hat{y}) \cdot f_y(\hat{x}, \hat{y})\,. \end{aligned}$$

Hier sind die Werte u_i^2, v_j^2 und $u_i v_j$ jeweils Zufallsgrößen, über deren Werte wir nichts sagen können. Wir haben aber gewisse Erwartungen darüber, wie sie sich *im Mittel* verhalten: u_i^2 sollte, da σ_x^2 die mittlere quadratische Abweichung von $\hat{x}$ ist, im Mittel gleich σ_x^2 sein und v_j^2 entsprechend σ_y^2. Genauso sollten u_i und v_j im Mittel gleich null sein, und wenn wir annehmen, daß die Fehler u_i und v_j voneinander unabhängig sind, sollte auch ihr Produkt im Mittel verschwinden. Diese sogenannten *Erwartungswerte* sind offensichtlich die bestmöglichen Schätzwerte für die jeweiligen Größen; als beste Schätzung für σ_w^2 erhalten wir damit das GAUSS*sche Fehlerfortpflanzungsgesetz*

$$\sigma_w^2 = f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2$$

oder

$$\sigma_w = \sqrt{f_x(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_x^2 + f_y(\hat{x}, \hat{y})^2 \cdot \sigma_y^2}\,.$$

Genauso gilt dieses Gesetz auch für Funktionen von mehr als zwei Größen; für $w = f(x_1, \ldots, x_n)$ ist

$$\sigma_w = \sqrt{f_{x_1}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_n}(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)^2 \cdot \sigma_{x_n}^2}\,.$$

d) Die Standardabweichung des Mittelwerts und die Schätzung der Varianz

Als einfache Anwendung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes betrachten wir die Funktion

$$\bar{x} = f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\,,$$

also den Mittelwert der x_i. Jede Messung x_i sei mit demselben erwarteten Fehler σ behaftet; da alle partiellen Ableitungen von f gleich $1/n$ sind, folgt für den Fehler des Mittelwerts

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,.$$

Dies bestätigt die implizit stets angewandte Regel, daß man durch mehrfaches Messen ein zuverlässigeres Ergebnis erhält; durch 25 Messungen beispielsweise läßt sich der Fehler auf ein Fünftel reduzieren, und für $n \to \infty$ geht er gegen Null *(Gesetz der großen Zahl).*

Damit wissen wir, wie man aus den Meßwerten auf den Fehler des Mittelwerts schließen kann – sofern man die Fehler der Meßwerte kennt. Wie lassen sich diese schätzen?

Zunächst ist

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}-x_i)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\big((\hat{x}-\bar{x})+(\bar{x}-x_i)\big)^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}-\bar{x})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{x}-\bar{x})\cdot(\bar{x}-x_i)\,.\end{aligned}$$

Die letzte dieser drei Summen ist

$$\frac{(\hat{x}-\bar{x})}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i) = 0\,,$$

da $\bar{x}$ der Mittelwert der x_i ist, die zweite Summe ist der Mittelwert der $(\bar{x}-x_i)^2$, und von der ersten schließlich wissen wir, daß $(\hat{x}-\bar{x})^2$, das Quadrat des Fehlers des Mittelwerts, den Erwartungswert σ^2/n hat. Die gesamte erste Summe ist somit

$$\frac{1}{n}\cdot n\cdot\frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}\,,$$

und obige Formel wird zu

$$\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2\,.$$

Bringt man hier noch den Term σ^2/n auf die linke Seite, so folgt

$$\frac{n-1}{n}\cdot\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2$$

oder

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2\,,$$

also

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\bar{x}-x_i)^2}{n-1}}\,.$$

Somit läßt sich auch σ aus den Meßdaten berechnen, der Meßfehler kann also ohne Kenntnis des „wahren“ Werts anhand der gemessenen Werte geschätzt werden.

e) Die Methode der kleinsten Quadrate

Oftmals ist zu gegebenen Beobachtungsdaten grundsätzlich bekannt, welcher *Art* von Gesetz sie genügen sollten, und das Problem besteht „nur“ noch darin, die in diesem Gesetz vorkommenden *Parameter* zu bestimmen. Im einfachsten Fall könnte man etwa an einen Widerstand denken, der dadurch gemessen wird, daß man verschiedene Spannungen U_i anlegt und die zugehörigen Stromstärken I_i mißt. Nach dem Ohmschen Gesetz ist dann $U_i = R\cdot I_i$, aber aufgrund der unvermeidlichen Meßfehler werden die verschiedenen Quotienten U_i/I_i natürlich nicht alle gleich sein. Die Lösung dieses Problems ist klar: Man nimmt den Mittelwert der Quotienten. Schwieriger wird es, wenn mehrere Parameter ins Spiel kommen.

Betrachten wir als Beispiel etwa die Entwicklung der Weltbevölkerung. Da (vor allem auf dem Stand von 1960) vieles für ein stärker als exponentielles Bevölkerungswachstum sprach, enwickelten damals HEINZ VON FOERSTER, PATRICIA M. MORA und LAWRENCE W. AMIOT, allesamt Elektrotechniker an der University of Illinois in Urbana, ein überexponentielles Wachstumsmodell. Die Wachstumsdifferentialgleichung führte auf Funktion

$$u = f(t) = \frac{\beta}{(t_0-t)^s}$$

wobei $u = f(t)$ die Weltbevölkerungsstärke um Zeitpunkt t bezeichnet; β, t_0 und t sind Parameter, die aufgrund der bekannten Zahlen zur Bevölkerungsentwicklung geschätzt werden müssen. Besonders interessant ist dabei natürlich der Parameter t_0, denn zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird die Weltbevölkerung unendlich, was man wohl mit dem Weltuntergang gleichsetzen kann.

Für zahlreiche Zeitpunkte t_i sind die Bevölkerungszahlen u_i oder zumindest Schätzungen dafür bekannt, aber natürlich gibt es auch hier keine Parameterwerte, für die *alle* u_i gleich $f(t_i)$ sind; Ziel kann es nur sein, die Parameter so zu wählen, daß die Unterschiede zwischen u_i und $f(t_i)$ nicht zu groß werden.

FOERSTER, MORA und AMIOT taten genau das und kamen auf das Ergebnis

$$\begin{aligned} \beta &= (179 \pm 14) \cdot 10^9 \\ s &= 0{,}990 \pm 0{,}009 \\ t_0 &= 2026{,}87 \pm 5{,}5 \text{ Jahre} \\ r &= 2{,}01 \pm 0{,}009\,; \end{aligned}$$

der Weltuntergang ist also etwa 2026 fällig. Der beste Schätzwert für das Datum ist, wenn wir 0,87 Jahre in Tage, Stunden und Minuten umrechnen, der 13. November gegen 13^{13} Uhr – sofern man das bei einer Standardabweichung von fünfeinhalb Jahren überhaupt so genau wissen will. (Für Einzelheiten sei auf die Arbeit *Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026*, Science **138**, November 1960, Seite 1291–1295, verwiesen.)

Da Weltuntergangsszenarien nicht zum Stoff dieser Vorlesung gehören, wollen wir auf die genaue Behandlung dieses Beispiels verzichten; wir wollen aber zumindest grundsätzlich verstehen lernen, wie man solche Parameterschätzungen durchführen kann, und wir wollen diese Techniken auch auf etwas alltäglichere Probleme anwenden.

Der allgemeine Ansatz ist folgender: Sei $u = f(a, b, \ldots; t)$ der von den Parametern $a, b, \ldots$ abhängige Zusammenhang zwischen den Größen t und u, und seien $(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)$ gegebene (Meß-)Werte, an die die Parameter angepaßt werden sollen.

Nehmen wir an, es gäbe Parameter $a, b, \ldots$, für die $u = f(a, b, \ldots; t)$ den exakten Zusammenhang zwischen den Größen u und t wiedergibt, daß aber die Werte u_i aufgrund von Beobachtungsfehlern von den $f(a, b, \ldots; t_i)$ abweichen – das ist genau die Situation, mit denen man es in den Naturwissenschaften und in der Technik meist zu tun hat.

Bezüglich der weiteren Vorgehensweise können wir wieder wie beim arithmetischen Mittel und der Standardabweichung argumentieren: Wir versuchen, den EUKLIDischen Abstand zwischen dem Vektor der

tatsächlichen Beobachtungswerte und dem der vorhergesagten Werte zu minimieren, d.h. wir wählen die Parameter $a, b, \ldots$ so, daß

$$\sum_{i=1}^{n} \big(u_i - f(a, b, \ldots; t_i)\big)^2$$

minimal wird – das ist die von CARL FRIEDRICH GAUSS eingeführte *Methode der kleinsten Quadrate.*

Wir betrachten hier nur beispielhaft den einfachsten Fall einer Funktion, die von zwei Parametern abhängt: die lineare Funktion

$$u = f(a, b; t) = a \cdot t + b\,.$$

In der Statistik bezeichnet man die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf dieses Problem als *lineare Regression.*

(Auf genau dieselbe Weise wie im folgenden lassen sich auch alle anderen Probleme, bei denen die Funktion f linear von ihren Parametern abhängt, auf das Lösen linearer Gleichungssysteme zurückführen.)

Gesucht sind also reelle Zahlen a und b, bei denen die Funktion

$$F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (u_i - a \cdot t_i - b)^2$$

minimal wird. Dort müssen dann insbesondere die beiden partiellen Ableitungen $F_a(a, b) = D_1 F(a, b)$ und $F_b(a, b) = D_2 F(a, b)$ verschwinden. Bevor wir diese ausrechnen, empfiehlt es sich aber, die Funktion zunächst durch Ausmultiplizieren nach Termen in a und b zu sortieren:

$$\begin{aligned} F(a, b) = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 + a^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 + n \cdot b^2 - 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i \\ - 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i + 2 \cdot a \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i\,. \end{aligned}$$

Damit ist

$$F_a(a, b) = 2 \cdot a \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot t_i + 2 \cdot b \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i$$