a) Kurvenstücke und Kurven

Wir hatten schon in §2 Kurvenstücke als differenzierbare Abbildungen eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$ eingeführt; hier wollen wir allgemeiner auch noch ganze *Kurven* einführen:

Definition: *a)* Ein *Kurvenstück* γ ist eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

eines Intervalls in den $\mathbb{R}^n$.
b) Eine *Kurve* γ ist eine endliche Folge von Kurvenstücken

$$\gamma_1, \dots, \gamma_r\colon [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n$$

von Kurvenstücken mit der Eigenschaft, daß

$$\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1}) \quad \text{für } i = 1, \dots, n-1.$$

c) Eine Kurve γ heißt geschlossen, wenn $\gamma_r(b_r) = \gamma_1(a_1)$ ist.

Die Bedingung im Teil *b)* der obigen Definition stellt sicher, daß Kurven, anschaulich betrachtet, zusammenhängend sind; es hat allein praktische Gründe, daß man nicht auch von den Intervallen verlangt, daß sie unmittelbar aneinander anschließen: Oft werden die Formeln für ein Kurvenstück einfacher, wenn man einen bestimmten Anfangswert wie etwa die Null für das Intervall nehmen kann.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen einer Kurve und einem Kurvenstück liegt in der Differenzierbarkeit: Durch Verschiebung der Parameterintervalle könnte man jede Kurve durch eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ beschreiben, aber dort, wo zwei Kurvenstücke aneinanderstoßen, muß diese Abbildung nicht differenzierbar sein; anschaulich gesprochen kann die Kurve dort einen „Knick“ haben.

Die Ableitung $\dot\gamma(t)$ ist ein Vektor, dessen Komponenten die Ableitungen der Koordinatenfunktionen von $\gamma(t)$ sind; wir bezeichnen ihn als Tangentenvektor der Kurve im Punkt $\gamma(t)$. Gelegentlich wird es wichtig sein, daß dieser Vektor ungleich dem Nullvektor ist; wir definieren daher

Definition: *a)* Ein Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *regulär,* wenn $\dot\gamma(t) \neq 0$ für alle $t \in (a,b)$.
b) Eine Kurve γ heißt *stückweise regulär,* wenn sie aus regulären Kurvenstücken zusammengesetzt werden kann.

Man beachte, daß für die Intervallendpunkte nichts gefordert wird: Selbst wenn die Ableitung dort existiert, muß sie nicht von Null verschieden kann. Auf diese Weise läßt sich ein Kurvenstück, bei dem $\dot\gamma(t)$ an endlich vielen Stellen gleich dem Nullvektor ist, immer noch als stückweise reguläre Kurve auffassen.

b) Die Bogenlänge einer Kurve

In der Integralrechnung wird die Fläche unterhalb einer Kurve dadurch definiert, daß man sie durch Rechtecke angenähert; falls deren Gesamtfläche bei immer feiner werdenden Unterteilungen gegen einen festen Grenzwert konvergiert, bezeichnetet man diesen als Fläche unterhalb der Kurve oder auch als RIEMANN-Integral über die die Kurve beschreibende Funktion.

Nichts spricht dagegen, bei der Definition der Bogenlänge genauso vorzugehen: Die primitiven Bausteine, mit denen wir die Kurve annähern, sind nun natürlich keine Rechtecke mehr, sondern Strecken; am einfachsten nehmen wir dazu Tangentenvektoren. Dazu brauchen wir allerdings Differenzierbarkeit, wir müssen uns also zunächst auf ein Kurven*stück* beschränken.

Sei also $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Kurvenstück; wir unterteilen das Intervall, wie wir es vom RIEMANN-Integral her gewohnt sind, durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}) einen Zwischenpunkt τ_i. Der Tangentenvektor im Punkt τ_i ist nach Definition $\dot\gamma(\tau_i)$, allerdings ist das nicht unbedingt der Vektor, den wir wollen: Wir wollen schließlich die Kurve durch ihre Tangente annähern, und dazu müssen wir die Länge an das Intervall anpassen, über dem wir die Kurve approximieren wollen.

Indem wir den Vektor $\dot\gamma(\tau_i)$ der Differentialquotienten

$$\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\cdot\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}=\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\begin{pmatrix}\gamma_1(t_{i+1})-\gamma_1(t_i)\\ \vdots\\ \gamma_n(t_{i+1})-\gamma_n(t_i)\end{pmatrix}$$

approximieren sehen wir, daß der Vektor $\overrightarrow{\gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})}$ ungefähr gleich

$$\dot\gamma(\tau_i)\cot(t_{i+1}-t_i)$$

ist, die Bogenlänge der Kurve kann also angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1}\left|\dot\gamma(\tau_i)\right|\cdot(t_{i+1}-t_i)\,.$$

Für die Kreislinie mit ihrer Parametrisierung $t\mapsto(\cos t,\sin t)$ ist dies in den Abbildungen 53 und 54 für eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0,2\pi]$ in zwanzig *bzw.* fünfzig Teilintervalle; im letzteren Fall ist in der Tat kaum mehr ein Unterschied zwischen der Kreislinie und den fünfzig Vektoren, durch die sie approximiert wird.

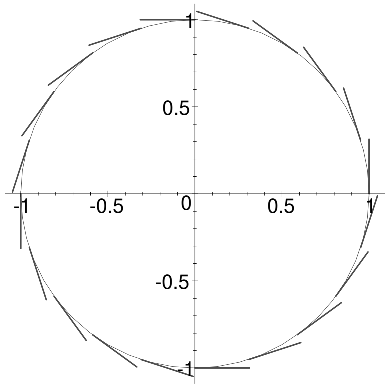

Abb. 53: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch zwanzig Strecken

Da γ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist auch $\left|\dot\gamma(t)\right|$ immerhin noch eine stetige und damit insbesondere

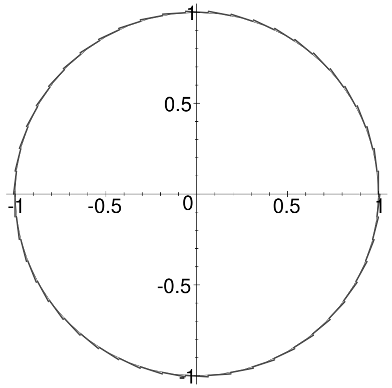

Abb. 54: Bogenlänge des Einheitskreises angenähert durch fünfzig Strecken

RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist. Somit kommen wir auf ganz natürliche Weise auf die

Definition: *a)* Die Bogenlänge eines Kurvenstücks $\gamma\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ ist

$$\int_a^b\left|\dot\gamma(t)\right|dt\,.$$

b) Die Bogenlänge einer Kurve γ, bestehend aus den Kurvenstücken $\gamma_1,\dots,\gamma_r$ ist die Summe der Bogenlängen der Kurvenstücke γ_i.

Um zu sehen, ob das alles wirklich vernünftig ist, berechnen wir die Bogenlänge der Kreislinie

$$\gamma_1\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2;\quad t\mapsto(\cos t,\sin t)\,.$$

Hier ist

$$\dot\gamma_1(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix},\quad\text{also}\quad\left|\dot\gamma_1(t)\right|=\sin^2 t+\cos^2 t=1\,,$$

und damit ist die Bogenlänge

$$\int_0^{2\pi} \left|\dot\gamma_1(t)\right| dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,,$$

wie erwartet; zumindest für diese Parametrisierung ist also alles vernünftig.

Alternativ hatten wir die Kreislinie in §2 auch parametrisiert durch

$$\gamma_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\quad t \mapsto \left(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1}\right)\,;$$

hier ist die Bogenlänge im Sinne obiger Definition nicht erklärt, allerdings können wir natürlich γ_3 auf endliche Intervalle einschränken und diese immer größer werden lassen; falls ein Grenzwert existiert, bekommen wir also hier eine Bogenlänge als uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\dot\gamma_3(t)\right| dt\,.$$

Berechnen wir zunächst die Ableitung von γ_3:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2+1}\right) = \frac{(t^2+1)\cdot 2 - 2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}\,,$$

d.h.

$$\left|\dot\gamma_3(t)\right| = \frac{\sqrt{(4t)^2+4(t^2-1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2\sqrt{(t^2+1)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{2}{t^2+1}\,.$$

Wie Abbildung 55 zeigt, ist diese Annäherung der Kreislinie durch Strecken erheblich unregelmäßiger als die obige, aber beim Übergang zu immer feiner werdenden Unterteilungen gehen natürlich trotzdem alle

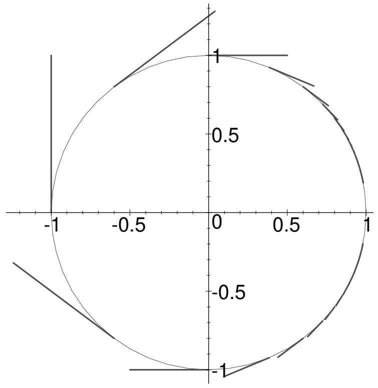

Abb. 55: Approximation durch Strecken in der rationalen Parametrisierung

Streckenlängen gegen null. (Eingezeichnet sind die Strecken zu einer Unterteilung des Intervalls $[-10, 10]$ in Teilintervalle der Länge $1/2$.)

Die Bogenlänge ist somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dt}{t^2+1} = 2\arctan t\Big|_{-\infty}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2}\right) = 2\pi\,,$$

auch bei dieser Parametrisierung erhalten wir also dasselbe Ergebnis, wie dies aus geometrischen Gründen auch sein muß: Die Bogenlänge ist schließlich eine Eigenschaft einer Kurve, nicht einer speziellen Parametrisierung der Kurve.

Ganz so einfach ist die Sache allerdings nun doch nicht: Schließlich parametrisiert auch

$$\gamma_4\colon [0, 20\pi] \to \mathbb{R}^2;\quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

die Kreislinie, aber nun ist die Bogenlänge

$$\int_0^{20\pi} \left|\dot\gamma_4(t)\right| dt = \int_0^{20\pi} dt = 20\pi\,.$$

Auch das erscheint geometrisch durchaus sinnvoll: Wenn man nicht nur einmal, sondern zehnmal im Kreise herum geht, legt man schließlich einen zehnmal so langen Weg zurück.

Wir müssen also etwas sorgfältig sein, wenn wir präzisieren wollen, was die Unabhängigkeit der Bogenlänge von der Parametrisierung wirklich bedeuten soll; da das ganze dadurch auch etwas umfangreicher wird, sei das entsprechende Lemma in den nächsten Abschnitt verschoben, wo wir es gleich etwas allgemeiner beweisen werden.

c) Integration eines Vektorfelds längs einer Kurve

Die Hauptanwendung von Kurvenintegralen besteht nicht darin, die Längen aller möglicher Kurven zu berechnen; der Hauptgrund, warum wir solche Integrale betrachten, ist die Berechnung der aufzuwendenden oder freiwerdenden Energie bei der Bewegung eines Teilchens in einem Kraftfeld *bzw.* – im Fall eines elektrisch geladenen Teilchens – eines elektromagnetischen Felds.

Gehen wir der Einfachheit halber aus von einem Kraftfeld $\vec{F}(\boldsymbol{x})$ und einem Teilchen, das sich entlang eines Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ durch dieses Feld bewegt, d.h. der Vektor $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ sei für alle t aus $[a,b]$ definiert. Im Punkt $\gamma(t)$ greift dann also der Kraftvektor $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)$ an; die Arbeit, die das Teilchen verrichten muß oder gewinnt, ist das Skalarprodukt aus Kraftvektor und (Tangential-)Vektor des Wegs.

Um die Gesamtarbeit zunächst näherungsweise auszurechen, unterteilen wir wie gewohnt das Intervall $[a,b]$ durch Zwischenpunkte

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = b$$

und wählen in jedem Teilintervall (t_i, t_{i+1}) einen Punkt τ_i. Zwischen den Punkten $\gamma(t_i)$ und $\gamma(t_{i+1})$ approximieren wir die Kurve wie im vorigen Abschnitt durch den Tangentenvektor $\dot\gamma(\tau_i)\cdot(t_{i+1}-t_i)$, die Arbeit kann dann angenähert werden durch

$$\sum_{i=0}^{N-1} \vec{F}\big(\gamma(\tau_i)\big)\cdot\dot\gamma(\tau_i)$$

Da γ nach Definition eines Kurvenstücks stetig differenzierbar ist, ist $\vec{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)$ für ein stetiges Vektorfeld eine stetige und damit insbesondere RIEMANN-integrierbare Funktion; wir wissen also, daß der Grenzwert für immer enger werdende Verfeinerungen der Unterteilung existiert und gleich dem Integral über diese Funktion ist.

Definition: *a)* $\vec{V} \in \mathcal{C}^0(D,\mathbb{R}^n)$ sei ein stetiges Vektorfeld auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und $\gamma\colon [a,b] \to D$ sei ein Kurvenstück. Das Integral über $\vec{V}$ entlang γ ist

$$\int_\gamma \vec{V}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot\gamma(t)\,dt\,.$$

b) Das Integral über $\vec{V}$ entlang einer Kurve γ ist die Summe der Integrale über $\vec{V}$ entlang der Kurvenstücke, aus denen γ zusammengesetzt ist.

Noch allgemeiner können wir ausgehen von einer beliebigen stetigen Funktion $f\colon C \to \mathbb{R}$ auf dem Bild $C = \gamma\big([a,b]\big)$ des Kurvenstücks $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und diese entlang γ integrieren. Als Motivation könnte man sich etwa vorstellen, daß γ eine materielle Kurve ist und $f\big(\gamma(t)\big)$ die (lineare) Massendichte im Punkt $\gamma(t)$ angibt, oder γ könnte den Weg eines Teilchens durch eine Flüssigkeit mit räumlich variabler Viskosität beschreiben *usw.*

Wenn wir wieder von derselben Unterteilung wie oben ausgehen und das Kurvenstück durch eine Folge von Tangentenvektoren approximieren, müssen wir hier die Summen

$$\sum_{i=0}^{N-1} f\big(\gamma(\tau_i)\big)\,\big|\dot\gamma(\tau_i)\big|$$

betrachten, und diese konvergieren wegen der Stetigkeit von f gegen

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds \underset{\text{def}}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\big|\dot\gamma(t)\big|\,dt\,.$$

Analog definieren wir auch das Integral über eine *Kurve* γ.

Definition: $\int\limits_\gamma f(x)\,ds$ heißt RIEMANN-STIELTJES-Integral über f entlang γ.

(ds steht hier für das Bogenelement der Kurve, wobei der Buchstabe s wohl vom lateinischen *spatium* = Entfernung kommen dürfte.)

Der niederländische Mathematiker THOMAS JAN STIELTJES (1856–1894) studierte in Leiden, schwänzte dort aber viele Vorlesungen um stattdessen die Werke von GAUSS und JACOBI zu lesen. Obwohl er bei seinen Prüfungen dreimal durchfiel, wurde er Assistent am Observatorium von Leiden, dessen Direktor ein Freund seines Vaters war. 1883 heiratete er und wechselte unter anderem auf Betreiben seiner Frau von der Astronomie zur Mathematik. Nachdem eine Berufung nach Groningen an seinem fehlenden Hochschulabschluß gescheitert war, übersiedelte er 1885 nach Frankreich, wo er Professor an der Universität Toulouse wurde und bis an sein Lebensende blieb. Seine Arbeiten befassen sich vor allem mit Verbindungen zwischen der Zahlentheorie und der Analysis; das RIEMANN-STIELTJES-Integral wurde in einer Arbeit über Kettenbrüche eingeführt.

Dieses RIEMANN-STIELTJES-Integral wird im Spezialfall $f \equiv 1$ zur Bogenlänge und für ein reguläres Kurvenstück γ ohne Selbstschnitte wird es für

$$f\bigl(\gamma(t)\bigr) = \frac{\vec{V}\bigl(\gamma(t)\bigr)\cdot\dot\gamma(t)}{\bigl|\dot\gamma(t)\bigr|}$$

zum Integral entlang γ über das Vektorfeld $\vec{V}$. (Falls sich die Kurve γ selbst schneidet, wie etwa eine 8, ist $\dot\gamma(t)$ im Schnittpunkt eventuell nicht nur vom Punkt $\gamma(t)$ abhängig, sondern vom Parameter t, so daß wir dann nicht in der Situation von RIEMANN-STIELTJES sind. Meist ist dies jedoch kein Problem, denn wenn so etwas nur endlich oft vorkommt, können wir die Kurve γ in endlich viele Kurvenstücke zerlegen, deren jedes die Voraussetzung erfüllt.)

Natürlich gelten auch für RIEMANN-STIELTJES-Integrale die üblichen aus der klassischen Integralrechung bekannten Rechenregeln: Da wir Kurvenintegrale als spezielle RIEMANN-Integrale definiert haben, sind dies in der Tat einfach Spezialfälle der dortigen Regeln. Wir haben also,

zum Beispiel, wieder die *Monotonieregel*

$$\int\limits_\gamma f(x)\,ds \le \int\limits_\gamma g(x)\,ds \quad \text{falls } f(x) \le g(x) \text{ für jeden Punkt auf } \gamma,$$

die *Linearität*seigenschaft

$$\int\limits_\gamma (\alpha f + \beta g)\,ds = \alpha\int\limits_\gamma f\,ds + \beta\int\limits_\gamma g\,ds\,,$$

und für *Zusammensetzungen* gilt

$$\int\limits_{\gamma+\delta} f\,ds = \int\limits_\gamma f\,ds + \int\limits_\delta f\,ds\,,$$

wobei $\gamma+\delta$ jene Kurve bezeichne, deren erste Kurvenstücke die Kurve γ definieren, während die restlichen die Bestandteile von δ sind.

Schließlich haben wir auch noch einen

Mittelwertsatz: Für jedes Kurvenstück $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und jede stetige Funktion f auf $\gamma([a,b])$ gibt es einen Parameterwert $\tau \in [a,b]$, so daß gilt

$$\int\limits_\gamma f\,ds = f(\tau)\cdot \textit{Bogenlänge von } \gamma\,.$$

Beweis: Dies ist einfach der gewöhnliche Mittelwertsatz der Integralrechnung, angewandt auf die Funktion

$$t \mapsto f\bigl(\gamma(t)\bigr)\cdot\dot\gamma(t)\,.$$

■

Es ist hier nicht wesentlich, daß γ als Kurven*stück* vorausgesetzt war; ein einfaches Argument mit dem Zwischenwertsatz zeigt, daß der Mittelwertsatz auch für Kurven gilt. Wesentlich ist dagegen die Stetigkeit von f, denn da der der Mittelwertsatz der Integralrechnung nur für stetige Funktionen gilt, können wir ihn nur anwenden, wenn $f\bigl(\gamma(t)\bigr)$ stetig ist. Ein einfaches Gegenbeispiel zum Mittelwertsatz wäre eine Kurve aus zwei gleichlangen Komponenten, auf deren einer f konstant gleich eins ist, während es auf der anderen verschwindet. Nach dem Mittelwertsatz, angewandt auf die beiden Komponenten, folgt, daß der Mittelwert über die gesamte Kurve gleich 1/2 ist, aber dieser Wert wird von f nirgends angenommen.

Als nächstes kommen wir zu der angekündigten Unabhängigkeit des Kurvenintegrals von der Parametrisierung der Kurve. Da diese, wie wir am Beispiel der mehrfach durchlaufenenen Kreislinie gesehen haben, nicht ganz uneingeschränkt gilt, müssen wir zunächst definieren, was wir meinen:

Definition: Zwei Kurvenstücke $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to \mathbb{R}^n$ heißen äquivalent, wenn es eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon [a,b] \to [c,d]$ gibt mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$ derart, daß $\delta \circ \varphi = \gamma$ ist, d.h. für alle $x \in [a,b]$ ist $\delta\big(\varphi(x)\big) = \gamma(x)$.

Dese Definition stellt insbesondere sicher, daß $\gamma\big([a,b]\big)$ und $\delta\big([c,d]\big)$ dieselbe Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ sind, so daß die beiden Kurven als Punktmengen übereinstimmen; durch die geforderte Bijektivität von φ ist aber auch sichergestellt, daß die Kurve bei beiden Parametrisierungen gleich oft durchlaufen wird. Daher erwarten wir

Lemma: $\gamma\colon [a,b] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\delta\colon [c,d] \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ seien äquivalente Kurvenstücke, und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion. Dann ist

$$\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds = \int_\delta f(\boldsymbol{x})\,ds\,.$$

Der *Beweis* ist eine einfache Anwendung der Kettenregel und der Substitutionsregel: Nach Definition der Äquivalenz gibt es eine bijektive stetig differenzierbare Funktion φ mit $\varphi(a) = c$ und $\varphi(b) = d$, so daß $\gamma = \delta \circ \varphi$ und damit $\dot\gamma = (\dot\delta \circ \varphi) \cdot \dot\varphi$ ist. Offensichtlich muß φ monoton wachsen, also ist $\dot\varphi(t)$ nirgends negativ und somit gleich seinem Betrag.

Nach der Substitutionsregel ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(\boldsymbol{x})\,ds &= \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\,\big|\dot\gamma(t)\big|\;dt = \int_a^b f\Big(\delta\big(\varphi(t)\big)\Big)\,\Big|\dot\delta\big(\varphi(t)\big)\Big|\,\dot\varphi(t)\,dt\\ &= \int_c^d f\big(\delta(t)\big)\,\Big|\dot\delta(t)\Big|\;dt = \int_\delta f(\boldsymbol{x})\,ds\,.\end{aligned}$$

■

d) Zirkulationsfreie und konservative Vektorfelder

Wir haben Kurvenintegrale über Vektorfelder eingeführt, um die Energie zu beschreiben, die zur Bewegung eines Teilchens durch ein Kraftfeld (oder ein elektromagnetisches Feld) aufgewendet werden muß oder dabei frei wird. Das gerade bewiesene Lemma zeigt, daß diese (Gesamt-)Energie nur vom Weg des Teilchens abhängt, nicht aber beispielsweise von seiner Geschwindigkeit. Wie aus der Physik bekannt ist, hängt aber beispielsweise bei reibungsfreier Bewegung eines Teilchens in einem mechanischen Kraftfeld der Weg nicht einmal von der Kurve ab, sondern nur von deren Anfangs- und Endpunkt oder, genauer gesagt, vom der potentiellen Energie des Anfangs- und des Endpunkts. Insbesondere verschwindet also das Integral längs einer jeden geschlossenen Kurve. In diesem Abschnitt wollen wir Vektorfelder mit dieser Eigenschaft genauer untersuchen.

Definition: *a)* Ein Vektorfeld $\vec V\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt *zirkulationsfrei,* wenn für jede geschlossene Kurve γ in D gilt:

$$\int_\gamma \vec V\,ds = 0\,.$$

b) $\vec V$ heißt *konservativ,* wenn es eine differenzierbare Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$ gibt, so daß $\vec V = \operatorname{grad}\varphi$ ist. φ heißt *Stammfunktion* von $\vec V$ und $-\varphi$ *Potentialfunktion.*

Zum Verständnis des Begriffs *konservativ* betrachten wir ein Beispiel aus der Physik: Ein Teilchen mit konstanter Masse m bewege sich durch das Gravitationsfeld

$$\vec{F} = -\operatorname{grad}\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

eines Himmelskörpers oder, allgemeiner, durch irgendein Potentialfeld $\vec{F} = -\operatorname{grad} U$. Nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gilt dann für die Bahn $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ des Teilchens mit der Zeit t als Parameter

$$\vec{F}\big(\gamma(t)\big) = m\ddot{\gamma}(t)\,,$$

d.h. die im Punkt $\gamma(t)$ wirkende Kraft ist gleich der Masse des Teilchens mal seiner Beschleunigung. Also ist in jedem Punkt $\gamma(t)$

$$m\ddot{\gamma}(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big) = 0\,.$$

Um aus dieser Vektorgleichung eine skalare Beziehung abzuleiten, bilden wir das Skalarprodukt mit dem Geschwindigkeitsvektor $\dot{\gamma}(t)$:

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + \operatorname{grad} U\big(\gamma(t)\big)\cdot\dot{\gamma}(t) \\ &= \frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\dot{\gamma}(t)\cdot\dot{\gamma}(t) + U\big(\gamma(t)\big)\right) \end{aligned}$$

nach Produkt- und Kettenregel. Also ist

$$E = \frac{m\left|\dot{\gamma}(t)\right|^2}{2} + U\big(\gamma(t)\big)$$

konstant, und das ist der klassische Energieerhaltungssatz: Die Summe aus kinetischer und potentieller Energie ist eine zeitlich unveränderliche Erhaltungsgröße.

Der Name „konservativ“ kommt vom lateinischen *conservare* = erhalten; der Grund für das negative Vorzeichen der Potentialfunktion liegt darin, daß der Gradient die Richtung des stärksten *Anstiegs* einer Funktion ist, wohingegen die Natur versucht, ein System zum Energie*minimum* zu bringen, so daß die Kräfte in Gegenrichtung zum Gradienten wirken.

Wie zu erwarten, sind die beiden Begriffe *konservativ* und *zirkulationsfrei* nicht unabhängig voneinander; tatsächlich werden wir gleich sehen, daß sie sogar äquivalent sind. Aus technischen Gründen wollen uns uns dabei, auch wenn es nicht unbedingt nötig wäre auf *zusammenhängende* Mengen im Sinne der folgenden

Definition: Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *zusammenhängend,* wenn es zu je zwei Punkten $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D$ eine Kurve γ gibt mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}$ und Endpunkt $\boldsymbol{y}$.

Diese Definition fordert zwar genau das, was wir gleich brauchen werden, sie ist aber nicht die übliche Definition einer zusammenhängenden Menge: In der Analysis wie auch in der Topologie bezeichnet man eine Menge D dann als zusammenhängend, wenn sie nicht als disjunkte Vereinigung zweier offener Teilmengen von D geschrieben werden kann; dies ist im allgemeinen eine schwächere Bedingung als die hier geforderte. Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die beiden Definitionen aber äquivalent:

Sei nämlich D_0 die Menge aller Punkte aus der offenen Menge D, die mit dem Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in D$ durch einen Weg verbunden werden können. Dann ist D_0 offen, denn für $\boldsymbol{x}_1 \in D_0$ gibt es wegen der Offenheit von D eine ε-Umgebung von $\boldsymbol{x}_1$, die ganz in D liegt. Da jeder Punkt dieser ε-Umgebung durch eine Strecke mit dem Mittelpunkt $\boldsymbol{x}_1$ verbunden werden kann, liegt auch diese Umgebung in D_0, d.h. D_0 ist offen.

Aber auch das Komplement von D_0 in D ist offen, denn auch für einen Punkt $\boldsymbol{x}_2 \in D \setminus D_0$ enthält D eine ε-Umgebung. Läge diese nicht ganz in $D \setminus D_0$, gäbe es dort einen Punkt $\boldsymbol{x}_3$, der durch einen geeigneten Weg mit $\boldsymbol{x}_0$ verbunden werden könnte. Da aber $\boldsymbol{x}_3$ durch eine Strecke mit $\boldsymbol{x}_2$ verbunden werden kann, gäbe dann auch einen Weg von $\boldsymbol{x}_2$ nach $\boldsymbol{x}_0$, im Widerspruch zur Annahme. Also ist $D \setminus D_0$ offen.

Damit ist D also Vereinigung der offenen und disjunkten Teilmengen D_0 und $D \setminus D_0$; wenn D zusammenhängend ist, geht das nur, wenn eine der beiden Mengen leer ist. D_0 enthält den Punkt $\boldsymbol{x}_0$, also ist $D \setminus D_0 = \emptyset$ und somit $D = D_0$. Also kann jeder Punkt aus D durch einen Weg mit $\boldsymbol{x}_0$ verbunden werden, und damit ist D zusammenhängend im Sinne der obigen Definition.

Der folgdende Satz zeigt die Äquivalenz der Begriffe *konservativ* und *zirkulationsfrei;* wegen seiner zweiten Aussage kann er als das mehrdimensionale Analogon des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechung aufgefaßt werden.

Satz: Für ein Vektorfeld $\vec{V}\colon D \to \mathbb{R}^n$ auf einer offenen zusammenhängenden Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1.) $\vec{V}$ ist konservativ.

2.) Es gibt eine Funktion $\varphi\colon D \to \mathbb{R}$, so daß für jede Kurve γ in D gilt:

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big)$$

hängt nur von den Endpunkten von γ ab.

3.) $\vec{V}$ ist zirkulationsfrei.

Beweis: 1.) $\Rightarrow$ 2.): Falls $\vec{V}$ konservativ ist, gibt es eine Stammfunktion φ auf D, so daß $\vec{V} = \operatorname{grad}\varphi$ ist. Für eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to D$ ist daher nach der Kettenregel

$$\int_\gamma \vec{V} \cdot ds = \int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt = \int_a^b \operatorname{grad}\varphi\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt}\varphi\big(\gamma(t)\big)\, dt = \varphi\big(\gamma(b)\big) - \varphi\big(\gamma(a)\big)\,.$$

Damit ist das Integral, genau wie wir es vom Eindimensionalen gewohnt sind, einfach gleich der Differenz der Werte der Stammfunktion am Endpunkt und am Anfangspunkt der Kurve.

2.) $\Rightarrow$ 3.): Diese Implikation ist klar, denn wenn der Wert des Integrals nicht von der Kurve abhängt, ist das Integral längs einer geschlossenen Kurve gleich dem Integral längs der zu einem Punkt degenerierten Kurve, und das ist natürlich gleich Null.

3.) $\Rightarrow$ 2.): Zumindest anschaulich ist auch hier klar, was wir machen: Wir durchlaufen zunächst die Kurve γ in der üblichen Weise und dann die Kurve δ „rückwärts“. Dies ergibt eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}$, auf die wir *3.)* anwenden können.

Konkret sei für ein Kurvenstück $\delta_i\colon [c_i, d_i] \to \mathbb{R}^n$ von δ

$$\delta_i^*\colon [c_i, d_i] \to \mathbb{R}^n; \quad t \mapsto \delta(c_i + d_i - t)$$

das rückwärts durchlaufene Kurvenstück zu δ_i; ist r die Anzahl der δ_i, so bestehe die Kurve δ^* aus den Kurvenstücken $\delta_r^*, \dots, \delta_1^*$. Da γ und δ dieselben Anfangs- und Endpunkte haben, ist der Endpunkt von δ^* gleich

dem Anfangspunkt von γ und umgekehrt; die Folge von Kurvenstücken $\gamma_1, \dots, \gamma_s, \delta_r^*, \dots, \delta_1^*$ ist deshalb eine geschlossene Kurve $\widetilde{\gamma}$. Nach Voraussetzung verschwindet das Integral längs einer solchen Kurve, d.h.

$$0 = \int_{\widetilde{\gamma}} \vec{V}\, ds = \int_\gamma \vec{V}\, ds + \int_{\delta^*} \vec{V}\, ds = \int_\gamma \vec{V}\, ds - \int_\delta \vec{V}\, ds\,,$$

und damit sind die Integrale über γ und δ gleich.

2) $\Rightarrow$ 1): $\boldsymbol{x}_0$ sei irgendein beliebig ausgewählter Punkt von D. Da D zusammenhängend ist, gibt es dann für jeden Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ eine Kurve $\gamma_{\boldsymbol{x}}$ mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}_0$ und Endpunkt $\boldsymbol{x}$.

Wir definieren nun einen Kandidaten für eine Stammfunktion durch

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\gamma_{\boldsymbol{x}}} \vec{V}\, ds\,;$$

wegen der Voraussetzung *2)* hängt $\varphi(\boldsymbol{x})$ in der Tat nur von $\boldsymbol{x}$ ab und nicht von der Wahl des Wegs $\gamma_{\boldsymbol{x}}$.

Für einen hinreichend kleinen Vektor $\vec{h}$ liegt auch die Verbindungsstrecke von $\boldsymbol{x}$ mit $\boldsymbol{x}+\vec{h}$ in D und kann durch eine Kurve η parametrisiert werden; dann ist

$$\varphi(\boldsymbol{x}+\vec{h}) - \varphi(\boldsymbol{x}) = \int_{\gamma_{\boldsymbol{x}+\vec{h}}} \vec{V}\, ds - \int_{\gamma_{\boldsymbol{x}}} \vec{V}\, ds = \int_\eta \vec{V}\, ds\,.$$

Speziell für einen Vektor $\vec{h} = h\vec{e}_i$ der Länge h in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_i$ der Koordinatenachse x_i ist

$$\int_\eta \vec{V}\, ds = \int_\eta V_i\, dx_i = \int_0^h V_i(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)\, dt\,,$$

und damit

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\boldsymbol{x}+h\vec{e}_i) - \varphi(\boldsymbol{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h V_i(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)\, dt = V_i(\boldsymbol{x})$$

nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Dies zeigt, daß $\operatorname{grad}\varphi = \vec{V}$ ist und das Vektorfeld somit eine Stammfunktion hat. ∎

Im $\mathbb{R}^3$ sollten wir erwarten, daß es noch eine vierte äquivalente Charakterisierung konservativer Vektorfelder gibt: Da die Zirkulationsfreiheit mit Drehungen um eine Achse zusammenhängt, sollte für solche Felder auch die Rotation verschwinden. Die eine Richtung ist trivial:

Lemma: Für ein zirkulationsfreies Vektorfeld $\vec{V}: D \to \mathbb{R}^3$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $\operatorname{rot}\vec{V} \equiv 0$ auf D.

Beweis: Nach dem gerade bewiesenen Satz ist ein zirkulationsfreies Vektorfeld konservativ, und nach den Rechenregeln aus §4*f)* gilt mit der Stammfunktion φ von $\vec{V}$

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0\,.$$

∎

Die umgekehrte Richtung allerdings ist zumindest in dieser Allgemeinheit falsch. Als **Gegenbeispiel** betrachten wir das Magnetfeld eines geradlinigen stromdurchflossenen Leiters, d.h. also das Vektorfeld

$$\vec{V}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi(x^2+y^2)}\begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

Wie wir in §4*e2)* gesehen haben, verschwindet seine Rotation im gesamten Definitionsbereich des Vektorfelds, d.h. überall außerhalb der z-Achse.

Trotzdem ist das Vektorfeld nicht zirkulationsfrei, denn für den Einheitskreis

$$\gamma: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3;\, t \mapsto (\cos t, \sin t, 0)$$

ist

$$\int_\gamma \vec{V}\,ds = \int_0^{2\pi} \vec{V}\big(\gamma(t)\big)\dot{\gamma}(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi\,.$$

Der Grund für dieses Verhalten liegt, wie wir bald sehen werden, darin, daß $\vec{V}$ auf der z-Achse nicht definiert ist: Obwohl die z-Achse im Vergleich zum gesamten $\mathbb{R}^3$ nur einen – sollte man meinen – vernachlässigbar geringen Teil ausmacht, genügt selbst diese minimale Definitionslücke, um die Umkehrung des Lemmas falsch zu machen.

§6: Mehrdimensionale Integrationstheorie

Die bisher betrachteten Kurvenintegrale waren alle zurückführbar auf gewöhnliche RIEMANN-Integrale über Funktionen einer reellen Veränderlichen. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Länge von Kurven zu bestimmen, nicht aber Flächeninhalte oder Volumen von höherdimensionalen geometrischen Gebilden. Deren Berechnung, sowie die von naheliegenden Verallgemeinerungen wie dem Fluß durch die Oberfläche eines Bereichs sind Gegenstand dieses Paragraphen.

a) Flächeninhalte und Volumina

Beginnen wir mit Flächeninhalten und Volumina. Bereits das gewöhnliche RIEMANN-Integral kann als Flächeninhalt interpretiert werden, allerdings nur für die Fläche zwischen der x-Achse und einer Kurve zwischen zwei gegebenen x-Koordinaten. Hier soll es nun um beliebige Flächen im $\mathbb{R}^2$, Volumina im $\mathbb{R}^3$ und die entsprechenden höherdimensionalen Konzepte gehen.

Bei der Definition des RIEMANN-Integrals wird die Fläche unterhalb der Kurve durch Rechtecke angenähert, deren Kantenlänge in x-Richtung immer kleiner wird, während die Kantenlänge in y-Richtung durch die

y-Koordinaten der Kurve $y = f(x)$ gegeben war. Im allgemeinen Fall, wo es keine ausgezeichnete Richtung mehr gibt, wird diese Unterscheidung zwischen x- und y-Richtung offensichtlich sinnlos; die einzig mögliche Verallgemeinerung des RIEMANN-Integrals besteht darin, daß man eine Fläche durch *beliebige* Rechtecke annähert und beim Grenzübergang *beide* Seiten gegen Null gehen läßt.

Ganz entsprechend müssen für dreidimensionale Bereiche Quader betrachtet werden, deren drei Seiten mit Verfeinerung der Überdeckung immer kleiner werden, *usw.*

Formal gehen wir dazu wie folgt vor: Wir wählen ein festes Koordinatensystem im $\mathbb{R}^n$ und betrachten Quader $Q_i \subset \mathbb{R}^n$, deren Kanten parallel zu denn Koordinatenachsen sind. (Für $n = 2$ sind diese „Quader" natürlich Rechtecke, und für $n = 1$ Intervalle.) Das Volumen eines solchen Quaders soll gleich dem Produkt seiner Kantenlängen sein, genau wie wir es aus der Elementargeometrie gewohnt sind.

Definition: Eine *Elementarmenge* in $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$, die als Vereinigung endlich vieler Quader mit achsenparallelen Kanten geschrieben werden kann; dabei dürfen sich zwei Quader höchstens in gemeinsamen Randpunkten schneiden.

Im $\mathbb{R}^2$ wäre also beispielsweise jede Menge, deren Rand auf kariertem Papier so gezeichnet werden kann, daß alle Linien auf Karokanten liegen, eine Elementarmenge.

Das Volumen $\mu(E)$ einer Elementarmenge E definieren wir als die Summe der Volumina der endlich vielen Quader, aus denen die Menge besteht; man überlegt sich leicht, daß es unabhängig von der Art der Zerlegung der Menge in Quader ist.

Nun gehen wir im wesentlichen genauso vor, wie bei der Definition des RIEMANN-Integrals: Dort hatten wir die Fläche unterhalb einer Kurve $y = f(x)$ sowohl von oben als auch von unten durch Rechtecke angenähert; die Flächen der entsprechenden Elementarmengen hatten wir als RIEMANNsche Unter- *bzw.* Obersummen bezeichnet. Das Integral existierte nach Definition genau dann, wenn bei immer weiterer Verfeinerung der Überdeckung die Untersummen und die Obersummen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergierten.

Entsprechend betrachten wir zur Definition des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ Elementarmengen, die ganz in B enthalten sind und bezeichnen den Grenzwert bei immer feiner werdenden Quader als *unteres Volumen* $\underline{\mu}(B)$. Zur exakten Definition verwenden wir besser nicht einen Grenzwert, da es etwas umständlich wäre, hier zu definieren, über was genau wir den Grenzwert bilden, sondern wir definieren $\underline{\mu}(B)$ einfach als *Supremum* der Volumina aller Elementarmengen, die in B liegen:

$$\underline{\mu}(B) \underset{\text{def}}{=} \sup\left\{\mu(E) \;\middle|\; E \subseteq B \text{ Elementarmenge}\right\},$$

falls dieses Supremum existiert. (Es existiert offensichtlich genau dann, wenn die Menge B beschränkt ist; für unbeschränkte Mengen wie etwa den gesamten $\mathbb{R}^n$ ist die Menge aller $\mu(E)$ unbeschränkt, so daß kein Supremum existiert.)

Genauso definieren wir ein oberes Volumen $\overline{\mu}(B)$ als *Infimum* der Volumina aller Elementarmengen, die B enthalten:

$$\overline{\mu}(B) \underset{\text{def}}{=} \inf\left\{\mu(E) \;\middle|\; E \supseteq B \text{ Elementarmenge}\right\},$$

falls dieses Infimum existiert. (Auch hier ist die Existenz wieder an die Beschränktheit von B gekoppelt, denn für ein unbeschränkte Menge B gibt es keine Elementarmenge, die B enthält, so daß wir das Infimum über die leere Menge bilden müßten.)

Die Abbildungen 56 und 57 zeigen die Annäherung einer Kreisfläche durch Elementarmengen von innen und außen; Abbildung 58 zeigt entsprechende Elementarmengen für eine Halbkugel.

Die Definition des Volumens ist nun fast selbstverständlich:

Definition: Wir sagen, die Menge $B \subset \mathbb{R}^n$ habe das Volumen $\mu(B)$, falls das untere Volumen $\underline{\mu}(B)$ und das obere Volumen $\overline{\mu}(B)$ beide existieren und gleich $\mu(B)$ sind.

Ganz entsprechend können wir auch Integrale über Funktionen definieren: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine Funktion auf der Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$, und

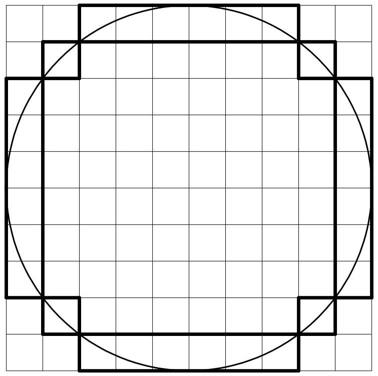

Abb. 56: Approximation einer Kreisfläche auf 10×10 Quadraten

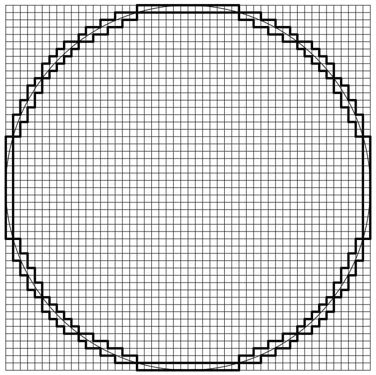

Abb. 57: Approximation einer Kreisfläche auf 50×50 Quadraten

$B \subseteq D$ sei eine Teilmenge von D. Dann können wir wieder RIEMANNsche Untersummen definieren, indem wir eine Elementarmenge $E \subseteq D$ betrachten, bestehend etwa aus den Quadern $Q_1, \ldots, Q_N$, und dazu die RIEMANNsche Untersumme definieren als

$$\sum_{i=1}^{N} \mu(Q_i) \cdot \inf\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in Q_i\} .$$

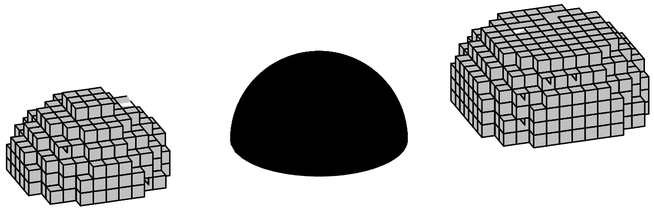

Abb. 58: Approximation einer Halbkugel durch Würfel

Die RIEMANNsche Obersumme für die Elementarmenge $E' \supseteq B$ bestehend aus den Quadern $Q'_1, \ldots, Q'_M$ ist entsprechend

$$\sum_{j=1}^{M} \mu(Q'_j) \cdot \sup\{f(\boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{x} \in Q_j\} ,$$

und wir definieren

Definition: $\int \underset{B}{\cdots} \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$ existiert, wenn das Supremum der Menge aller RIEMANNscher Untersummen gleich dem Infimum der Menge aller RIEMANNscher Obersummen ist; dieser gemeinsame Wert ist der Wert des Integrals.

Die Schreibweise $\int \underset{B}{\cdots} \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \ldots dx_n$ soll dabei bedeuten, daß wir n Integralzeichen schreiben, für $B \subset \mathbb{R}^2$ also

$$\iint\limits_B f(x, y)\, dx\, dy$$

und für $B \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_B f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz .$$

(Nicht alle Lehrbücher verwenden bei der mehrdimensionalen Integration mehrere Integralzeichen; einige, wie etwa **[D]**, schreiben unabhängig von der Dimension immer nur ein Integralzeichen. In Physik und Technik scheint die Schreibweise mit mehreren Integralzeichen üblicher zu sein, deshalb verwenden wir diese Konvention.)

Integrale und Volumina sind natürlich eng miteinander verwandt: Einerseits läßt sich das Volumen eines Bereichs B auch als

$$\mu(B) = \int_B \cdots \int 1\, dx_1 \cdots dx_n$$

schreiben, andererseits ist, völlig analog zur Flächeninterpretation des RIEMANN-Integrals, für eine auf B nichtnegative Funktion f

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\mu\left(\left\{(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \begin{matrix}(x_1, \ldots x_n) \in B \text{ und} \\ 0 \le y \le f(x_1, \ldots, x_n)\end{matrix}\right\}\right) .$$

Auch für das so definierte mehrdimensionale Integral gelten aus offensichtlichen Gründen die Analoga der aus aus der eindimensionalen Integralrechnung bekannten Rechenregeln wie die *Monotonieregel*

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n \le \int_B \cdots \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n ,$$

falls $f(\boldsymbol{x}) \le g(\boldsymbol{x})$ für alle $\boldsymbol{x} \in B$, und die *Linearität*seigenschaft

$$\int_B \cdots \int \big(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\big)\, dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \alpha \int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n + \beta \int_B \cdots \int g(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n .$$

Außerdem haben wir wieder einen

Mittelwertsatz: Für einen zusammenhängenden abgeschlossenen und beschränkten Bereich $B \subset \mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f\colon B \to \mathbb{R}$ gibt es einen Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in B$, so daß gilt

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \mu(B) .$$

Der *Beweis* geht ganz genauso wie in $\mathbb{R}$: Nach **[Ba]**, §2.3, *Satz 3.16,* nimmt eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sowohl ihr Maximum als auch ihr Minimum an; genauso zeigt man, daß eine stetige Funktion auf einer beschränkten abgeschlossen Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt. Sei etwa $\boldsymbol{x}_1 \in B$ ein Punkt, in dem f minimal wird, und $\boldsymbol{x}_2$ einer, in dem f maximal wird. Dann ist für jedes $\boldsymbol{x} \in B$

$$f(\boldsymbol{x}_1) \le f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_2) ;$$

nach der Monotonieregel ist daher

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x}_1)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_1) \cdot \mu(B)$$

kleiner oder gleich

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n ,$$

was wiederum kleiner oder gleich

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x}_2)\, dx_1 \cdots dx_n = f(\boldsymbol{x}_2) \cdot \mu(B)$$

ist. Damit gibt es eine Zahl η zwischen $f(\boldsymbol{x}_1)$ und $f(\boldsymbol{x}_2)$, so daß

$$\int_B \cdots \int f(\boldsymbol{x})\, dx_1 \cdots dx_n = \eta \cdot \mu(B)$$

ist. Wir müssen noch zeigen, daß dieses η ein Funktionswert von f auf B ist. Dazu verbinden wir $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ durch eine Kurve γ; indem wir nötigenfalls die Parameterintervalle der Kurvenstücke von γ verschieben, können wir annehmen, daß γ durch ein zusammenhängendes Parameterintervall $[a, b]$ parametrisiert wird. Wegen der Stetigkeit von f haben wir dann eine stetige Funktion

$$\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}; \quad t \mapsto f\big(\gamma(t)\big)$$

mit $\varphi(a) = f(\boldsymbol{x}_1)$ und $\varphi(b) = f(\boldsymbol{x}_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz (**[Ba]**, §2.3, *Satz 3.10*) gibt es dazu ein $\tau \in [a, b]$ mit $\varphi(c) = \eta$; mit $\boldsymbol{x}_0 = \gamma(\tau)$ ist also $f(\boldsymbol{x}_0) = \eta$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen. ■

Wie beim gewöhnlichen (eindimensionalen) RIEMANN-Integral ist die Existenz von mehrdimensionalen Integralen normalerweise kein Problem, allerdings kann man natürlich leicht Beispiele konstruieren, für die das Integral nicht existiert. Wir können etwa in Analogie zur DIRICHLETschen Sprungfunktion die Menge

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x, y \in \mathbb{Q} \text{ und } 0 \le x, y \le 1\right\}$$

aller Punkte mit rationalen Koordianten im Einheitsquadrat betrachten. Da $\mathbb{Q}$ keine reellen Intervalle enthält, sind alle Rechtecke, die ganz in B enthalten sind, zu Punkten degeneriert. Eine in B enthaltene Elementarmenge besteht also aus endlich vielen Punkten und hat somit den Flächeninhalt null. Eine Elementarmenge, die ganz B enthält, muß aber das gesamte Einheitsquadrat enthalten, da die rationalen Punkte dort dicht liegen; sie hat also mindestens die Fläche eins. Somit ist eins der obere und null der untere Flächeninhalt von B; der Flächeninhalt von B existiert also nicht.

Die folgende Überlegung liefert ein Kriterium für die Existenz des Volumens einer Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^n$: Die Differenzmenge zwischen einer Elementarmenge, die B enthält, und einer Elementarmenge, die in B enthalten ist, kann offenbar wieder als Elementarmenge aufgefaßt werden und enthält den Rand von B. Je besser die äußere und die innere Elementarmenge B annähern, desto weniger unterscheidet sich diese Differenzmenge vom Rand; die Existenz eines Volumens von B ist daher äquivalent dazu, daß das Volumen des Rands von B existiert und verschwindet.

Für eine *unbeschränkte* Menge B können wir bislang weder Volumen noch Integrale definieren, denn unsere Konstruktion ist nur anwendbar, wenn B in einer Elementarmenge enthalten ist. Das ist allerdings nichts neues, denn beim eindimensionalen RIEMANN-Integral tritt genau das gleiche Problem auf und wird dadurch gelöst, daß man *uneigentliche* Integrale (**[Ba]**, §4.3) einführt: Beispielsweise ist

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx\,,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Genauso definieren wir jetzt

Definition: $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine unbeschränkte Menge und die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei in einer B umfassenden Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt. Wir sagen, das *uneigentliche Integral*

$$\int\cdots\int_B f(\boldsymbol{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

existiere, wenn für jede Folge

$$B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_i \subset \cdots$$

von beschränkten Mengen B_i mit $\bigcup_{i\ge1} B_i = B$ der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty} \int\cdots\int_{B_i} f(\boldsymbol{x})\,dx_1\cdots dx_n$$

existiert, und wenn er für jede solche Folge denselben Wert hat. Diesen gemeinsamen Wert bezeichnen wir als den Wert des uneigentlichen Integrals.

Wie auch im Eindimensionalen genügt es hier nicht, nur eine einzige Folge von Mengen B_i zu betrachten; ansonsten könnte man beispielsweise dem uneigentlichen Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \sin x \sin y\,dx\,dy$$

je nachdem, ob man für die B_i Quadrate nimmt, in deren Eckpunkten der Cosinus für beide Koordinaten verschwindet, oder Quadrate, in deren Eckpunkten die beiden Cosinus einen konstanten anderen Wert haben, dem Integral die verschiedensten Werte zuordnen. Tatsächlich aber existiert dieses uneigentliche Integral natürlich genauso wenig wie das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx$ im Eindimensionalen.

Für interessantere Beispiele sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen, wo wir

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

berechnen werden.

b) Integration über Normalbereiche

Der Grund dafür, daß wir bislang noch keine interessanten Beispiele für mehrdimensionale Integrale haben, liegt natürlich darin, daß man Werte von Integralen fast nie durch Anwendung der Definition bestimmt. Im Eindimensionalen wird stattdessen meist den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt, über den die Berechnung eines Integrals auf die (nicht immer explizit mögliche) Bestimmung einer Stammfunktion zurückgeführt wurde; hier, im Mehrdimensionalen, wollen wir die Integration soweit wie möglich auf mehrfache eindimensionale Integration zurückführen. Zumindest in einem Fall wissen wir schon, wie das geht: Ist die Funktion f auf dem Intervall $[a,b]$ nichtnegativ, so hat

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \text{ und } 0 \le y \le f(x)\right\}$$

die Fläche

$$\iint\limits_B dx\,dy = \int\limits_a^b f(x)\,dx\,.$$

Auch den Flächeninhalt der etwas komplizierteren Menge

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \text{ und } g(x) \le y \le h(x)\right\}$$

läßt sich, wenn $g(x) \le h(x)$ ist für alle $x \in [a,b]$, durch das eindimensionale Integral

$$\iint\limits_B dx\,dy = \int\limits_a^b \big(h(x) - g(x)\big)\,dx$$

ausdrücken. Ähnliche Formeln gelten auch nach Vertauschung der Rollen von x und y.

Definition: Eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Normalbereich vom Typ I,* wenn es reelle Zahlen $a \le b$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(x) \le h(x)$ für alle $x \in [a,b]$, so daß

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a \le x \le b \text{ und } g(x) \le y \le h(x)\right\}$$

ist. B heißt *Normalbereich vom Typ II,* wenn es reelle Zahlen $c \le d$ und stetig differenzierbare Funktionen $g, h\colon [c,d] \to \mathbb{R}$ gibt mit $g(y) \le h(y)$ für alle $y \in [a,b]$, so daß

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; c \le y \le d \text{ und } g(y) \le x \le h(y)\right\}.$$

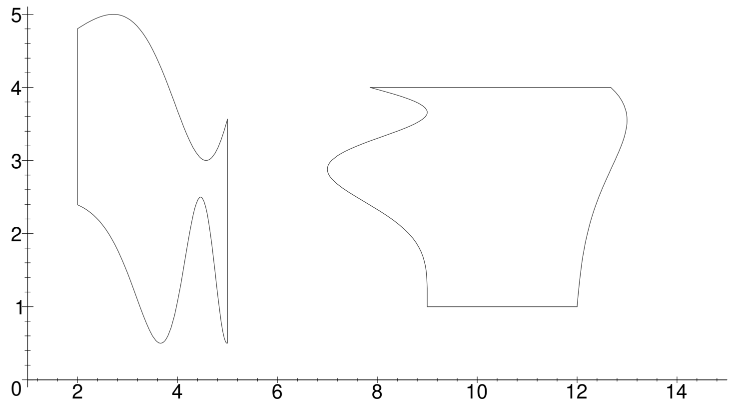

Abb. 59: Normalbereiche vom Typ I und II

Für diese Normalbereiche können wir nicht nur die Fläche leicht ausrechnen, sondern auch beliebige Integrale über stetige Funktionen:

Satz: $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$.
a) Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ I ist

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right) dx\,.$$

b) Für einen Normalbereich $B \subseteq D$ vom Typ II ist

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\right) dy\,.$$

Beweis: Wir wissen bereits, daß der Flächeninhalt von B existiert; da f eine stetige Funktion ist, folgt dann auch ohne größere Schwierigkeiten die Existenz des Integrals von f über B. Wir wollen darauf nicht genauer eingehen, sondern nur benutzen, daß es dann ausreicht, spezielle Folgen von Elementarmengen zu betrachten. Eine solche spezielle Folge erhalten wir etwa dadurch, daß wir den ganzen $\mathbb{R}^2$ mit einem Quadrategitter überziehen; die Seitenlänge der Quadrate sei $k = \frac{b-a}{N}$ und ihr Flächeninhalt dementsprechend gleich k^2.

Da die Aussage *b)* durch Vertauschung der beiden Koordinaten in *a)* übergeht, reicht es, den Satz für Normalbereiche vom Typ I zu beweisen.

Als in B enthaltene Elementarmenge E_N wählen wir die Menge aller Quadrate, die ganz in B liegen; als B enthaltende Elementarmenge E'_N entsprechend die Menge aller Quadrate, die nichtleeren Durchschnitt mit B haben. Wir numerieren die Quadrate in E_N und E'_N mit zwei Indizes: Das Intervall $[a,b]$ wird durch das Quadrategitter in $N-1$ Teilintervalle der Länge k zerlegt; das Quadrat Q_{ij} liege über dem i-ten dieser Teilintervalle und sei, von unter her gesehen, das j-te Quadrat, das ganz in B liegt. Die Anzahl der ganz in B liegenden Quadrate im i-ten Streifen sei r_i; dann ist die RIEMANNsche Untersumme zu E_N gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{r_i}\mu(Q_{ij})\cdot\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{r_i}\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k\right)\cdot k\,.$$

Für die RIEMANNsche Obersumme müssen wir alle Quadrate betrachten, die mit B nichtleeren Durchschnitt haben; dabei treten im allgemeinen auch Quadrate Q_{ij} unterhalb von Q_{i1} auf, für deren Bezeichnung wir Indizes $j \le 0$ verwenden.

Im i-ten Streifen mögen die Q_{ij} mit $s_i \le j \le t_i$ auftreten; dann ist die RIEMANNsche Obersumme gleich

$$\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=s_i}^{t_i}\mu(Q_{ij})\cdot\sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y) = \sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j=s_i}^{t_i}\sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k\right)\cdot k\,.$$

Da f als stetige Funktion RIEMANN-integrierbar ist, konvergieren für

$N \to \infty$ und damit $k \to 0$

$$\sum_{j=1}^{r_i}\inf_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k \quad\text{und}\quad \sum_{j=s_i}^{t_i}\sup_{(x,y)\in Q_{ij}} f(x,y)\cdot k$$

beide gegen

$$\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,;$$

die RIEMANNschen Unter- und Obersummen daher entsprechend gegen

$$\int_a^b\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right)dx\,,$$

wie behauptet. ■

Als erstes Beispiel berechnen wir zur Kontrolle etwas Altbekanntes, die Fläche der Einheitskreisscheibe

$$B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le 1\right\},$$

die wir hier umständlich als

$$\iint_B dx\,dy$$

ausrechnen wollen.

B kann sowohl als Normalbereich vom Typ I wie auch als solcher vom Typ II geschrieben werden:

$$\begin{aligned} B &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\le x\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}\\ &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; -1\le y\le 1 \text{ und } -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}. \end{aligned}$$

In der ersten Darstellung ist nach Teil *a)* des gerade bewiesenen Satzes

$$\iint_B dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\right)dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Zur Berechnung dieses Integrals können wir die *Substitutionsregel* anwenden: Mit $x = \sin t$ ist

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}\,dx\,,$$

und das linke Integral ist gleich

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt\,.$$

Nach den EULERschen Formeln ist

$$2\cos^2 t = \frac{(e^t+e^{-t})^2}{2} = \frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{2} = \cos 2t + 1\,,$$

die Stammfunktion ist also $\frac{1}{2}\sin 2t + t$ und wir erhalten

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\sin 2t + t\,\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi\,,$$

wie erwartet.

Etwa interessanter ist die Berechnung des (hoffentlich auch bekannten) Volumens der Einheitskugel

$$K = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}.$$

Hierzu könnten wir eine dreidimensionale Integration durchführen, es geht aber zum Glück auch einfacher: Natürlich genügt es, das Volumen der Halbkugel $z \ge 0$ zu bestimmen, und dies ist die Menge aller Punkte zwischen der Einheitskreisscheibe B der (x,y)-Ebene und dem Graph der Funktion

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

über B. Somit ist das Volumen der Halbkugel gleich

$$\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy\right)dx\,.$$

Schreibt man mit $a = \sqrt{1-x^2}$

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{a^2-y^2} = a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,,$$

so ist das innere Integral

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = a\int_{-a}^{a} \sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,dy\,,$$

was durch die Substitution $y = au$ zu

$$a\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,a\,du = a^2\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\,du = \frac{\pi}{2}a^2$$

wird, wie wir oben gerade nachgerechnet haben. Somit ist

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\,dy = \frac{\pi}{2}(1-x^2)$$

und

$$\iint_B \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \frac{\pi}{2}(1-x^2)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3} = \frac{2\pi}{3}\,;$$

das Kugelvolumen als Volumen zweier Halbkugeln ist also in der Tat, wie es sein soll, gleich $4\pi/3$.

In diesen Beispielen hatten wir nur Kreisscheiben als Normalbereiche, aber der Leser kann sich leicht überzeugen selbst davon überzeugen, daß sich die Nützlichkeit dieser Mengen keineswegs auf solche trivialen Beispiele beschränkt: Man zeichne frei irgendeneinen beschränkten zweidimensionalen Bereich auf ein Blatt Papier und überzeuge sich davon, daß sich dieser durch Einfügen von (meist sehr wenigen) waagrechten und senkrechten Strecken als Vereinigung von Normalbereichen der Typen I und II darstellen läßt.

c) Die Transformationsformel

Von den vielen Regeln zur expliziten Bestimmung einer Stammfunktion ist sicherlich die Substitutionsregel die nützlichste; es lohnt sich daher, nach einer Verallgemeinerung dieser Regel für mehrdimensionale Integrale zu suchen.

Die Idee im Eindimensionalen ist bekanntlich, daß wir die Integrationsvariable x als Funktion $x = \varphi(t)$ einer neuen Variablen t schrieben; mit $a = \varphi(t_0)$ und $b = \varphi(t_1)$ ist dann

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} f\big(\varphi(t)\big)\dot\varphi(t)\,dt\,.$$

Genauso können wir auch bei einer Funktion mehrerer Veränderlicher diese als Funktionen neuer Variabler schreiben.

Beginnen wir der Anschaulichkeit halber mit einer Funktion $f(x,y)$ zweier Veränderlicher und schreiben wir diese als Funktionen

$$x = x(u,v) \quad \text{und} \quad y = y(u,v)$$

zweier neuer Variabler u und v. Ein wichtiges Beispiel, das man zur Veranschaulichung während der folgenden Rechnungen im Kopf behalten sollte, ist die Polarkoordinatensdarstellung

$$x = x(r,\varphi) = r\sin\varphi \quad \text{und} \quad y = y(r,\varphi) = r\cos\varphi\,.$$

Zur Definition des Integrals

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy$$

approximierten wir den Intgegrationsbereich B durch kleine achsenparallele Rechtecke. Wenn wir statt über x und y über u und v integrieren, müssen wir entsprechend den Bereich B', in dem sich diese neuen Variablen bewegen, in achsenparallele Rechtecke zerlegen; dabei fordern wir nun natürlich Parallelität zur u- und zur v-Achse. Wir betrachten ein festes dieser Rechtecke; es habe die Eckpunkte

$$(u_0,v_0),\quad (u_0+h,v_0),\quad (u_0,v_0+k) \quad \text{und} \quad (u_0+h,v_0+k)$$

und somit den Flächeninhalt hk.

Die Menge der Punkte (x,y), die zu den Punkten (u,v) aus diesem Rechteck gehören, d.h. also die Menge

$$\big\{\big(x(u,v),y(u,v)\big) \bigm| u_0 \le u \le u_0+h \quad \text{und} \quad v_0 \le v \le v_0+k\big\}$$

ist natürlich im allgemeinen kein Rechteck, sondern eine krummlinig begrenzte Figur; im Beispiel der Polarkoordinaten etwa wäre sie ein Winkelbereich zwischen zwei Kreisbögen. (An den bei Polarkoordinaten etwas problematischen Nullpunkt als Ecke denken wir in diesen Zusammenhang lieber nicht; es ist klar, daß sein Einfluß bei immer kleiner werdenden Rechtecken für eine um den Nullpunkt beschränkte Funktion f immer kleiner wird.)

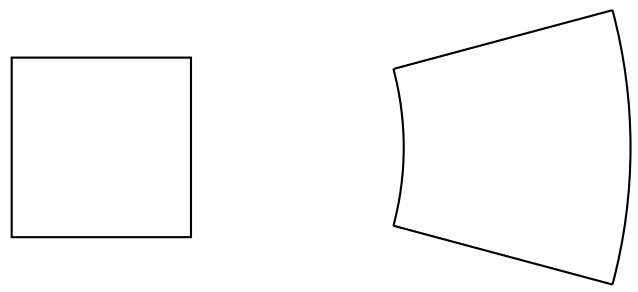

Abb. 60: Rechteck in (r,φ)-Ebene mit Bild in (x,y)-Ebene

Trotzdem machen wir, wenn x und y *differenzierbare* Funktionen von u und v sind, bei kleinen Rechtecken keinen allzu großen Fehler, wenn wir die transformierte Menge als *Parallelogramm* betrachten, denn nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$x(u_0+h,v_0)=x(u_0,v_0)+h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h)$$
$$y(u_0+h,v_0)=y(u_0,v_0)+h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h)$$

$$x(u_0,v_0+k)=x(u_0,v_0)+k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k)$$
$$y(u_0+h,v_0+k)=y(u_0,v_0)+k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k)$$

und

$$\begin{aligned} x(u_0+h,v_0+k)&=x(u_0,v_0)+h\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h)\\ &\quad+k\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k)\\ y(u_0+h,v_0)&=y(u_0,v_0)+h\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)+o(h)\\ &\quad+k\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)+o(k)\,; \end{aligned}$$

wenn wir Terme der Größenordnung $o(h)$ und $o(k)$ vernachlässigen, ist die transformierte Menge also ein Parallelogramm mit Kantenvektoren

$$h\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad k\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}.$$

Der Flächeninhalt eines Parallelogramms ist bekanntlich gleich dem Produkt der Kantenlängen mal dem Sinus des eingeschlossenen Winkels; falls wir die beiden Vektoren in den $\mathbb{R}^3$ einbetten, indem wir ihnen eine Null als dritte Komponente geben, ist das gerade gleich dem Betrag des Vektorprodukts, das hier nur in der dritten Komponenten von null verschieden ist; die Fläche des Parallelogramms ist also

$$hk\cdot\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|.$$

Der gesamte Integrationsbereich wird approximiert durch die Vereinigung der Parallelogramme zu den sämtlichen Rechtecken, mit denen B'

approximiert wurde; wenn wir also davon ausgehen, daß die Koordinatentransformation zwischen und B und B' bijektiv ist und wenn wir – was eigentlich noch durch genauere Abschätzungen zu rechtfertigen wäre – auch davon ausgehen, daß wir die oben erwähnten Fehler beim Grenzübergang $h\to 0$ und $k\to 0$ vernachlässigen können, erhalten wir die

Transformationsformel: $f\colon B\to\mathbb{R}$ sei eine integrierbare Funktion auf $B\subseteq\mathbb{R}^2$, und die Variablen x,y seien als differenzierbare Funktionen $x=x(u,v)$ und $y=y(u,v)$ neuer Variabler u,v dargestellt. Ist dann $B'\subseteq\mathbb{R}^2$ ein Integrationsbereich, für den die Abbildung

$$B'\to B;\quad (u,v)\mapsto\big(x(u,v),\,y(u,v)\big)$$

bijektiv ist, so gilt

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{B'} f\big(x(u,v)\,y(u,v)\big)\left|\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|du\,dv\,.$$

Für unbeschränkte Integrationsbereiche stehen hier natürlich uneigentliche Integrale; da diese – so sie existieren – Grenzwerte von üblichen Integralen sind, ist dies kein Problem.

Im Fall

$$x=r\cos\varphi\quad\text{und}\quad y=r\sin\varphi$$

der Polarkoordinaten ist

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\varphi\cdot(r\cos\varphi)-(-r\sin\varphi)\cdot\sin\varphi=r\,,$$

d.h.

$$\iint\limits_B f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{B'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi.$$

Für diese Formel hätten wir eigentlich nicht den ganzen Apparat der Transformationsformel gebraucht; Abbildung 60 zeigt uns, wie wir die Fläche des Bilds eines Parallelogramms exakt ausrechnen können: Variiert r zwischen r und $r+h$ und φ zwischen φ und $\varphi+k$, so erhalten wir in der (x,y)-Ebene als Bild die Differenz zwischen zwei Kreissektoren mit Öffnungswinkel k und Radius $r+h$ beziehungsweise r; der Flächeninhalt ist also

$$\tfrac12 k(r+h)^2-\tfrac12 kr^2=r\cdot kh+\tfrac12 kh^2\,.$$