Beim dritten Beispiel

$$\dot{y}(t) + \frac{y(t)}{2t^3} = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = 0$$

schließlich ist

$$f(y,t) = -\frac{y}{2t^3}\,;$$

hier ist zwar die y-Abhängigkeit harmlos, aber

$$|f(y_2,t) - f(y_1,t)| = \frac{1}{|2t^3|}\,|y_2 - y_1|$$

läßt sich nicht durch durch eine Schranke der Form $L\,|y_2 - y_1|$ abschätzen, da $1/\,|2t^3|$ für t gegen null nicht beschränkt bleibt.

Obwohl in keinem der drei Fälle eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt war, existierten doch immer Lösungen, und in der Tat reichen für die bloße Existenz von Lösungen deutlich schwächere Voraussetzungen als für Existenz und Eindeutigkeit. Nach einem Satz von PEANO etwa hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t),t\big) \quad \text{und} \quad y(t_0) = c_0$$

mit *stetigem* f mindestens eine Lösung. Der Beweis arbeiter wieder mit einer Iteration, nutzt allerdings die gleichgradige Stetigkeit einer Folge aus um die Existenz und die Stetigkeit der Grenzfunktion zu zeigen. Da nichteindeutige Lösungen für Anwendungen meist nutzlos sind, wollen wir hier auf diesen Beweis verzichten.

GUISEPPE PEANO (1858–1932) war Sohn eines Landarbeiters und wuchs auf einem Bauernhof nahe Cuneo im Piemont auf. 1870 brachte ihn ein Bruder seiner Mutter nach Turin, wo er weiterführende Schulen und schließlich die Universität besuchte. Dort wurde er 1880 Assistent und 1890 Professor. Den gerade erwähnten Existenzsatz bewies er 1886, und 1890 zeigte er, daß das Anfangswertproblem $\dot{y}(t) = 3y^{2/3}$ mit $y(0) = 0$ mehrere Lösungen hat. Die berühmten PEANO-Axiome für die natürlichen Zahlen veröffentlichte er 1889, und zwar aus unerfindlichen Gründen in lateinischer Sprache. Später beschäftigte er sich vor allem mit Logik.

k) Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen

Es gibt eine ganze Reihe von Typen elementar integrierbarer nichtlinearer Differentialgleichungen; die meisten davon sind allerdings außerhalb von Lehrbüchern über Differentialgleichungen nur selten anzutreffen. Zwei Ausnahmen sind wichtig genug, um hier behandelt zu werden: Exakte Differentialgleichungen und Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen. Exakte Differentialgleichungen benutzen in so starkem Maße die Differential- und Integralrechnung mehrerer Veränderlicher, daß wir sie auf das nächste Kapitel verschieben müssen; hier geht es also nur um Differentialgleichungen mit getrennten Veränderlichen.

Darunter versteht man eine Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = f\big(y(t),t\big)\,,$$

bei der sich die Funktion $f(y,t)$ als Produkt einer Funktion von y und einer Funktion von t schreiben läßt. Da die Funktion von y besser keine Nullstellen haben sollte, setzen wir ihren Kehrwert in den Nenner und schreiben die Differentialgleichung somit als

$$\dot{y}(t) = \frac{g(t)}{h\big(y(t)\big)}\,.$$

Multiplikation mit dem Nenner und Integration führen auf

$$h\big(y(t)\big)\dot{y}(t) = g(t) \quad \text{und} \quad \int h\big(y(t)\big)\dot{y}(t)\,dt = \int g(t)\,dt\,.$$

Das linke Integral ist nach der Substitutionsregel einfach $\int h(y)\,dy$, wir erhalten also mit

$$\int h(y)\,dy = \int g(t)\,dt + C$$

eine Beziehung zwischen y und t. Damit sind die Lösungsfunktionen zumindest implizit dargestellt.

Ein erstes Beispiel kennen wir bereits: Offensichtlich ist eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$\dot{y}(t) = a(t)\cdot y(t)$$

falls $y(t) \neq 0$ ist von dieser Form mit

$$g(t) = a(t) \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{1}{y}\,;$$

wir erhalten also die Beziehung

$$\int \frac{dy}{y} = \int a(t)\,dt \quad \text{oder} \quad \ln y = \int a(t)\,dt + C\,.$$

Diese Gleichung läßt sich durch Anwendung der Exponentialfunktion auflösen; wir erhalten das Ergebnis

$$y(t) = e^{\int a(t)\,dt + C}\,.$$

Als zweites Beispiel betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)} \quad \text{mit} \quad y(0) = 2\,.$$

Trennung der Veränderlichen und Integration führt auf

$$\int y\,dy = -\int t\,dt \quad \text{oder} \quad \frac{y^2}{2} = C - \frac{t^2}{2}\,.$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$y(t) = \pm\sqrt{2C - t^2}\,,$$

und die Anfangsbedingung $y(0) = 2$ ist genau dann erfüllt, wenn $C = 2$ ist und ein Pluszeichen vor der Wurzel steht, d.h.

$$y(t) = \sqrt{4 - t^2}\,.$$

Etwas komplizierter ist das Beispiel

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{\cos^2 2t \cos^2 3y}\,;$$

Hier erhalten wir

$$\int \cos^2 3y\,dy = \int \frac{dt}{\cos^2 2t}\,.$$

Partielle Integration links und die Erinnerung an die Ableitung des Tangens für das rechte Integral führen auf die Beziehung

$$\frac{1}{6}\cos 3y \sin 3y + \frac{y}{2} = \frac{1}{2}\tan 2t + C\,,$$

bei der es wohl ziemlich hoffnungslos sein dürfte, wenn wir versuchen, nach y aufzulösen. Die Auflösung nach t ist aber problemlos, so daß wir mit

$$t = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\cos 3y \sin 3y}{3} + y - C\right)$$

wenigstens die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion explizit darstellen können.

Als letztes Beispiel schließlich wollen wir eine Differentialgleichung betrachten, die auch von unabhängigem Interesse ist, die *logistische Gleichung*

$$\dot{y}(t) = \lambda y(t)\big(K - y(t)\big) \quad \text{mit} \quad \lambda, K > 0\,.$$

Sie beschreibt das Wachstum einer Population $y(t)$, deren Wachstumsrate sich immer weiter verlangsamt je mehr sich $y(t)$ an die Grenze K annähert. Für $y(t) = K$ ist $\dot{y}(t) = 0$, die Bevölkerungszahl bleibt also stabil, und für $y(t) > K$ ist $\dot{y}(t)$ negativ, d.h. die Bevölkerungszahl sinkt.

Dieses Modell wurde 1846 von dem belgischen Mathematiker PIERRE FRANÇOIS VERHULST (1804–1849) vorgeschlagen und unter anderem auf die Bevölkerung Belgiens angewandt; sein Schätzwert $K \approx 9\,400\,000$ unterscheidet sich nicht sehr von der derzeitigen Bevölkerungszahl 10 215 800.

Da auf der rechten Seite der Differentialgleichung nur eine Funktion von y steht, haben wir trivialerweise eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen, und im interessanten Bereich

$$0 < y(t) < K$$

gibt es auch keine Probleme mit Nullstellen des Nenners. Wir erhalten damit

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K - y(t)\big)} = \int dt = t - t_0\,,$$

wobei der Grund für die Schreibweise der Integrationskonstante als $-t_0$ gleich klar werden wird.

Das Integral links kann durch Partialbruchzerlegung berechnet werden; da

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y} = \frac{K}{y(K-y)}$$

ist, folgt

$$\frac{1}{\lambda y(K-y)} = \frac{1}{\lambda K}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{K-y}\right)$$

und

$$\int \frac{dy}{\lambda y(t)\big(K-y(t)\big)} = \frac{1}{\lambda K}\big(\ln y - \ln(K-y)\big) = \frac{1}{\lambda K}\ln\frac{y}{K-y}\,.$$

Die Umkehrfunktion der Lösungsfunktion ist also

$$t = t_0 + \frac{1}{\lambda K}\ln\frac{y}{K-y}\,.$$

Wir können auch nach y auflösen:

$$\frac{y}{K-y} = e^{\lambda K(t-t_0)} \Longrightarrow \frac{K-y}{y} = e^{-\lambda K(t-t_0)} \Longrightarrow \frac{K}{y} = 1 + e^{-\lambda K(t-t_0)}\,,$$

und damit ist schließlich

$$y(t) = \frac{K}{1+e^{-\lambda K(t-t_0)}}\,.$$

Speziell ist $y(t_0) = K/2$, die Integrationskonstante gibt also den Zeitpunkt an, zu dem die Population ihre halbe Maximalstärke erreicht hat.

Differenzieren der logistischen Differentialgleichung ergibt

$$\ddot{y}(t) = \lambda y(t)\big(-\dot{y}(t)\big) + \lambda\dot{y}(t)\big(K-y(t)\big) = \lambda\dot{y}(t)\big(K-2y(t)\big)\,,$$

die Wachstumsrate $\dot{y}(t)$ steigt also, solange $y(t) < K/2$ oder $t < t_0$ ist, danach beginnt sie zu sinken. Dementsprechend ist der Graph der Lösungsfunktion $y(t)$ konkav für $t < t_0$ und konvex für $t > t_0$; bei $t = t_0$ sitzt der einzige Wendepunkt. Da diese Kurvenform an ein langgestrecktes S errinnert, spricht man von einer *sigmoiden* Kurve; der Leser kann sich aussuchen, ob er sich eher an σ, ς oder Σ erinnert fühlt.

Solche Kurven werden beispielsweise bei Erneuerungsprozessen oft beobachtet; ist etwa $y(t)$ = Prozentsatz aller in Frage kommender Personen oder Firmen, die zum Zeitpunkt t bereits eine technische oder sonstige Neuerung eingeführt haben, so genügt auch $y(t)$ ungefähr einer logistischen Gleichung. Dies erscheint plausibel, denn ein potentieller Anwender erfährt von der Neuerung im Gespräch mit jemandem, der sie schon eingeführt hat; es gibt am Anfang also um so mehr Zuwachs bei $y(t)$ je größer $f(t)$ ist. Andererseits kann ein Prozentsatz nie größer als 100 werden, so daß die Steigerungsrate gegen Null gehen muß, wenn sich $y(t)$ der 100%-Grenze nähert. Vergleiche zwischen diesem Modell und vielen tatsächlichen Erneuerungsprozessen findet man etwa bei

C.T. FISCHER, R.H. PRY: A simple substitution model of technological change, *Technological Forecasting and Social Changes* **3** (1971), 75–88.

VERHULST führte die logistische Gleichung, wie bereits erwähnt, zur Modellierung des Bevölkerungswachstums ein, allerdings zeigen weder die Daten für die Bundesrepublik Deutschland noch die für die Weltbevölkerung eine gute Übereinstimmung mit diesem Modell. Seit 1940 immer wieder als Beispiel zitiert wird aber die Bevölkerung der Vereinigten Staaten von Amerika, das wir uns deshalb etwas genauer anschauen wollen:

Die Vereinigten Staaten führen seit 1790 in jedem zehnten Jahr einen „Census“ durch, in dessen Rahmen insbesondere auch die Gesamteinwohnerzahl festgestellt wird; sie bieten daher ein ideales Beispiel, für einen über einen langen Zeitraum hinweg dokumentierten Wachstumsprozess. Zwar hat sich das Territorium der USA seit 1790 gewaltig vergrößert, aber da Staaten wie das 1867 für \$7 200 000 dazugekaufte Alaska kaum Einwohner haben, ist der Effekt dieser Änderungen auf die Bevölkerungszahlen fast vernachlässigbar – besonders wenn man bedenkt, daß Volkszählungsdaten notorisch unzuverlässig sind. Wir betrachten daher die Daten, wie sie bei den einzelnen Volkszählung für das jeweils aktuelle Territorium ermittelt wurden.

Das U.S. Department of Commerce, Bureau of the Census, veröffentlicht diese Daten ohne jegliche Rundung; in der folgenden Tabelle sind sie zur besseren Übersicht auf volle Hunderttausender gerundet und in Einheiten von einer Million Einwohner dargestellt.

Bevölkerungsentwicklung in den USA 1790–1990

Jahr:	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
Bevölkerung:	3,9	5,3	7,2	9,6	12,9	17,1	23,1
Jahr:	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
Bevölkerung:	31,4	39,8	50,2	62,9	76,0	92,0	105,7
Jahr:	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
Bevölkerung:	122,8	131,7	151,3	179,3	203,3	226,5	248,7

Quelle: Statistical Abstracts of the United States, 113th edition, 1993; hier zitiert nach **E.K. Yeargers, R.W. Shonkwiler, J.V. Herod:** An introduction to the mathematics of biology: with computer algebra models, *Birkhäuser,* 1996, Seite 93

Die graphische Darstellung in Abbildung 13 zeigt die Datenpunkte zusammen mit einer logistischen Kurve; wie man sieht, ist die Übereinstimmung recht gut, aber bei weitem nicht perfekt.

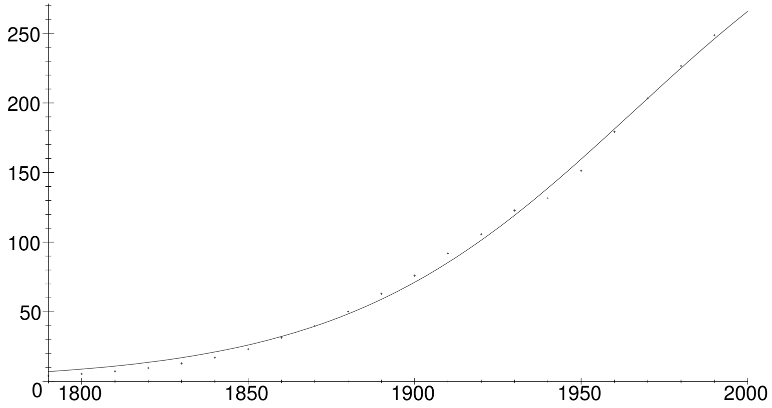


Abb. 13: U.S. Population Census 1790–1990 mit logistischer Kurve

Eine bessere Modellierung mit *zwei* logistischen Kurven zeigt Abbildung 14: Die erste Kurve, die den Datenpunkten bis 1940 angepaßt ist, hat eine Grenzkapazität K von 190 Millionen Einwohner, die zweite, für die Daten ab 1950, hat $K = 367$ Millionen.

Historisch ist diese Beinahe-Verdoppelung leicht zu erklären: Schließ-

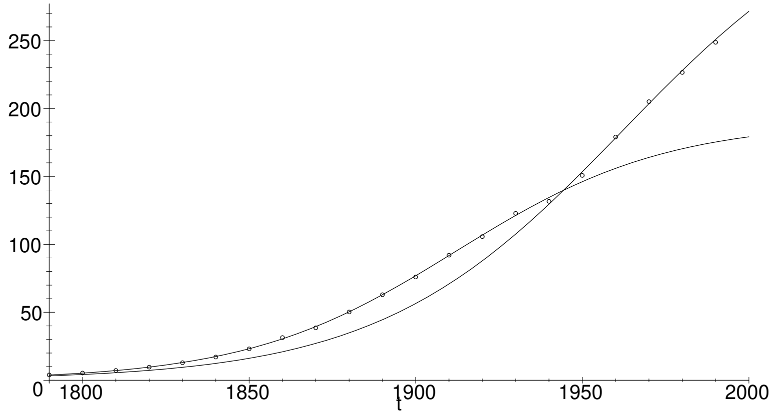


Abb. 14: U.S. Population Census 1790–1990 mit zwei logistischen Kurven

lich gingen die USA aus dem zweiten Weltkrieg als Weltmacht hervor, und eine solche hat die Macht, auch teilweise auf Kosten anderer Staaten zu leben. Von daher erscheint es durchaus nachvollziehbar, daß sich die Grenzkapazität des Systems USA nach dem zweiten Weltkrieg deutlich vergrößert hat.

l) Eindeutigkeitsprobleme für Systeme

Natürlich können alle Probleme, die wir vom Eindimensionalen her kennen, auch im Mehrdimensionalen auftreten; auch bei Systemen von Differentialgleichungen muß man sich also um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen Gedanken machen. Zum Glück geht alles fast genauso wie im eindimensionalen Fall.

Wir betrachten ein Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\bigl(\vec{y}(t), t\bigr) \quad \text{und} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0\,,$$

mit einer Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^n \times [t_0,\, t_1] \to \mathbb{R}^n\,.$$

Ausgeschrieben ist also

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(\vec{y}, t) = \begin{pmatrix} f_1(y_1, \ldots, y_n, t) \\ \vdots \\ f_n(y_1, \ldots, y_n, t) \end{pmatrix}$$

mit Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$.

Wir versehen den $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm

$$\|\vec{v}\| = \max_{i=1}^{n} |v_i|$$

und sagen, die Funktion f oder auch das obige System erfülle eine LIPSCHITZ-Bedingung, wenn es eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ gibt, so daß für alle $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ und alle $t \in [t_0, t_1]$ gilt

$$\left\| f\left(\vec{z}, t\right) - f((\vec{y}, t) \right\| \le L \, \|\vec{z} - \vec{y}\| \ .$$

Dann gilt auch hier der

Satz von Picard und Lindelöf: Falls f stetig ist und eine LIPSCHITZ-Bedingung erfüllt, hat jedes Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right) \quad \text{mit} \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$$

im Intervall $[t_0, t_1]$ eine eindeutig bestimmte Lösung.

Der *Beweis* geht fast wörtlich genauso wie im Eindimensionalen: Wir schreiben das System um als

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} f\left(\vec{y}(\tau), \tau\right) d\tau \ ,$$

wobei das Integral über einen Vektor von Funktionen einfach der Vektor der Integrale über die Komponenten sein soll:

$$\int_{t_0}^{t} f\left(\vec{y}(\tau), \tau\right) d\tau = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t} f_1\left(\vec{y}(\tau), \tau\right) d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t} f_n\left(\vec{y}(\tau), \tau\right) d\tau \end{pmatrix} .$$

Sodann definieren wir eine Supremumsnorm durch

$$\|\vec{y}(t)\| \underset{\text{def}}{=} \max_{i=1}^{n} \sup_{t \in [t_0, t_1]} |y_i(t)| \ ,$$

beweisen auch hierfür einen BANACHschen Fixpunktsatz und folgern schließlich daraus den Satz von PICARD und LINDELÖF. ∎

o) Gleichgewichte

Ein allgemeines System

$$\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right)$$

wird nur selten eine Lösung haben, die sich in geschlossener Form angeben läßt; meist wird man sich mit (nicht immer unproblematischen) numerischen Näherungslösungen begnügen müssen. In diesem letzten Abschnitt des Paragraphen über Differentialgleichungen wollen wir uns, hauptsächlich anhand von Beispielen, überlegen, wie man auch bei solchen nicht explizit lösbaren Gleichungen zu Aussagen über das Verhalten der Lösungsfunktionen kommen kann.

Eine wesentliche Rolle spielen dabei die Gleichgewichtslösungen:

Definition: Ein Punkt $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt *Fixpunkt* oder *Gleichgewichtslösung* des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right)$, wenn die konstante Funktion $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ eine Lösung ist.

Anschaulich bedeutet dies, daß der Zustand eines Systems, das durch diese Differentialgleichung beschrieben wird, für $\vec{y}(t) = \vec{y}_0$ zeitlich konstant ist, das System befindet sich dann also im Gleichgewicht.

Da die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet, sind die Fixpunkte des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{y}}(t) = f\left(\vec{y}(t), t\right)$ gerade die Lösungen des Gleichungssystems

$$f(\vec{y}_0, t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [t_0, t_1] \,.$$

Bei einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem ist das natürlich ein nichtlineares Gleichungssystem, man wird sich also auch hier bei der Lösung oft mit Näherungsverfahren begnügen müssen. Die Variable t tritt hier natürlich nur bei nichtautonomen Systemen auf; bei den in Naturwissenschaft und Technik häufigen autonomen Systemen haben wir ein Gleichungssystem, in dem nur die Komponenten von $\vec{y}_0$ vorkommen.

Ein klassisches Beispiel, bei dem sich die Fixpunkte leicht ausrechnen lassen, ist das Raubtier-Beutetier-Modell, das 1925 von LOTKA und VOLTERRA vorgeschlagen wurde: In einem Gebiet gebe es eine Population von Raubtieren, die sich von genau einer Art von Beutetieren ernähren. Für die Beutetiere sei genügend Nahrung vorhanden, so daß diese sich, falls es keine Raubtiere gäbe, beliebig vermehren könnten. Wenn wir die Populationsstärke zum Zeitpunkt t mit $x(t)$ bezeichnen, können wir also annehmen, daß die Beutetiere bei Abwesenheit der Raubtiere eine konstanter Wachstumsrate hätten, d.h.

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) \quad \text{mit} \quad \alpha > 0\,.$$

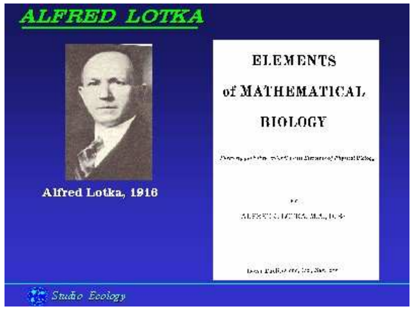
Die Raubtiere, deren Bestand zum Zeitpunkt t wir mit $y(t)$ bezeichnen wollen, würden in Abwesenheit der Beutetiere relativ schnell verhungern und somit aussterben, was wir durch eine negative Wachstumsrate modellieren können:

$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0\,.$$

Nun sind aber die Raubtiere und die Beutetiere nicht isoliert voneinander, sondern es kommt zu Begegnungen zwischen den beiden Populationen. Deren Häufigkeit ist etwa proportional zum Produkt der beiden Populationsstärken, und die Auswirkung einer solchen Begegnung ist positiv für die Wachstumsrate der Raubtiere, aber negativ für die der Beutetiere. Unser Modell läßt sich somit beschreiben durch das System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t) \end{aligned}$$

mit positiven reellen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.



Der Amerikaner ALFRED LOTKA (1880–1949) war von der Ausbildung her Mathematiker, interessierte sich aber zeit seines Lebens stark für Physik, insbesondere Thermodynamik, und war einer der ersten, der die Evolution unter physikalischen Gesichtspunkten betrachtete. Er zählt auch zu den Pionieren der Selbstorganisation, der Bioenergetik und der Demographie; auf letzterem Gebiet arbeitete er auch für eine Versicherung.

VITO VOLTERRA (1860–1940) wurde in Ancona im damaligen Kirchenstaat geboren. Er studierte bereits als Elfjähriger mathematische Literatur, promovierte dann aber in Physik über ein Thema aus der Hydrodynamik. Er hatte Lehrstühle für Mechanik und für mathematische Physik in Pisa, Turin und Rom. Seine wichtigsten Arbeiten beschäftigen sich mit partiellen Differentialgleichungen und vor allem Integralgleichungen. Ab 1922 kämpfte er im italienischen Parlament gegen den Faschismus und verlor deshalb 1931 nach Auflösung des Parlaments seinen Lehrstuhl in Rom. Den Rest seines Lebens verbrachte er größtenteils im Exil.

Zur Bestimmung der Gleichgewichtslösungen müssen wir für $x(t)$ und $y(t)$ Konstanten einsetzen; dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha x_0 - \beta x_0 y_0 = x_0(\alpha - \beta y_0) \\ 0 &= -\gamma y_0 + \delta x_0 y_0 = y_0(\gamma - \delta x_0)\,. \end{aligned}$$

Es gibt somit genau zwei Gleichgewichtslösungen: Einmal die uninteressante Lösung $x(t) = y(t) \equiv 0$, die im wesentlichen besagt, daß ohne Raub- und Beutetiere in diesem System nichts passiert, und dann noch die Lösung

$$x(t) \equiv \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{und} \quad y(t) \equiv \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

Falls die beiden Populationen diese Stärken haben, fressen also die Raubtiere genau so viele Beutetiere weg, wie nachwachsen, und umgekehrt reichen die Beutetiere gerade aus, um die Raubtierpopulation zu ernähren.

Was passiert, wenn die Populationen nicht im Gleichgewicht sind? Wir haben offensichtlich kaum Chancen, das Differentialgleichungssystem explizit zu lösen, also beginnen wir mit einer numerischen Simulation.

Abbildung 15 zeigt eine Lösung; die spiralförmige Kurve läßt vermuten, daß $x(t)$ und $y(t)$ beide periodisch sind mit derselben Periode; es bietet sich also an, die Kurve in die xy-Ebene zu projezieren. Abbildung 16 zeigt das Ergebnis für Lösungskurven zu verschiedenen Anfangsbedingungen; abgesehen von der Gleichgewichtslösung, die in diesem Bild einfach ein Punkt ist, sieht man geschlossene Kurven, die das Gleichgewicht umrunden.

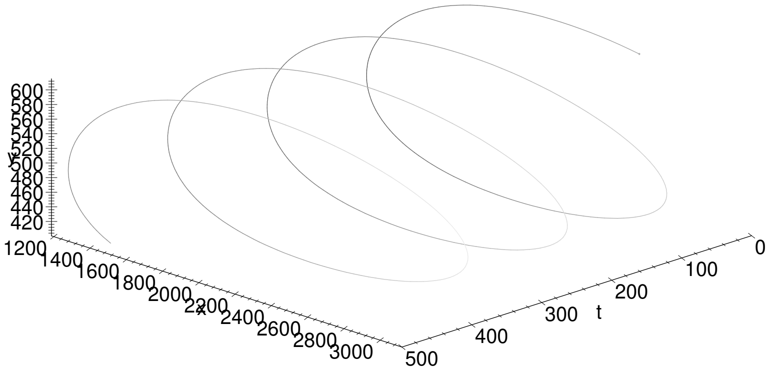


Abb. 15: Numerische Simulation des Raubtier-Beutetier-Systems

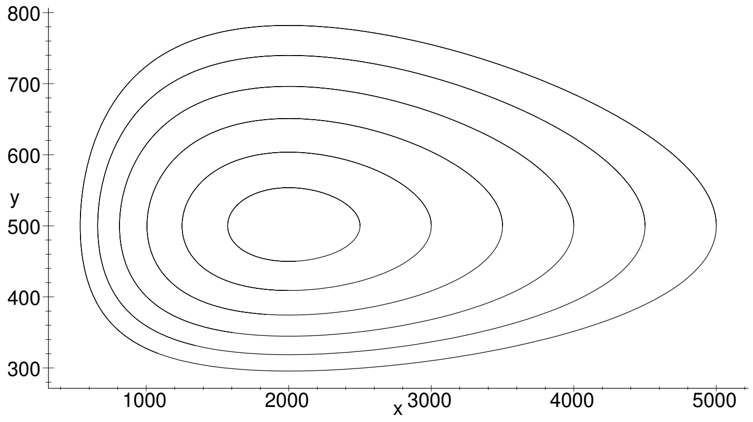


Abb. 16: Lösungskurven in der xy-Ebene

Zumindest diese Tatsache können wir auch mathematisch beweisen: Wenn wir y als Funktion von x betrachten, ist

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot y(t)}{\dot x(t)} = \frac{-\gamma y + \delta xy}{\alpha x - \beta xy} = \frac{y}{\alpha - \beta y} \cdot \frac{\delta x - \gamma}{x}\,,$$

wir haben also eine Differentialgleichung mit getrennten Veränderli-

chen. Trennung der Variablen führt auf

$$\int \left(\frac{\alpha}{y} - \beta\right) dy = \int \left(\delta - \frac{\gamma}{x}\right) dx$$

oder

$$\alpha \ln y - \beta y = \delta x - \gamma \ln x + C\,.$$

Anwendung der Exponentialfunktion macht daraus

$$\frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma} \cdot e^C\,.$$

Diese Gleichung können wir zwar weder nach y noch nach x auflösen, aber eine einfache Kurvendiskussion der Funktionen

$$f(y) = \frac{y^\alpha}{e^{\beta y}} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{e^{\delta x}}{x^\gamma}$$

zeigt, daß es in der Tat zu jedem x-Wert höchstens zwei y-Werte gibt und umgekehrt, so daß wir zumindest qualitativ Abbildung 16 bestätigt haben. Durch TAYLOR-Entwicklung der beiden Funktionen kann man sich auch leicht davon überzeugen, daß die Lösungskurven in der unmittelbaren Umgebung des Gleichgewichts näherungsweise als Ellipsen aufgefaßt werden können.

Tatsächlich hätten wir diese Dynamik des Systems auch ohne Lösung der Differentialgleichung für y als Funktion von x bekommen können, denn bei einer autonomen Differentialgleichung

$$\dot{\vec y}(t) = f\big(\vec y(t)\big)\,,$$

wie hier ordnet die Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ einen Vektor zu, der Tangentenvektor an jede Lösungskurve durch diesen Punkt sein muß. Diese Vektoren können wir, allein auf Grund unserer Kenntnis der Funktion f, berechnen und zeichnen; Abbildung 17 zeigt das entstehende Bild. Wie man sieht, geben schon die Vektoren allein eine recht gute Vorstellung vom Verlauf der Lösungskurven.

An dieser Stelle stoßen wir wieder einmal an die Grenzen dessen, was man mit eindimensionaler Analysis machen kann; im nächsten Kapitel werden wir Vektorfelder wie das in Abbildung 17 aufgezeichnete mit den Methoden der mehrdimensionalen Analysis genauer untersuchen.

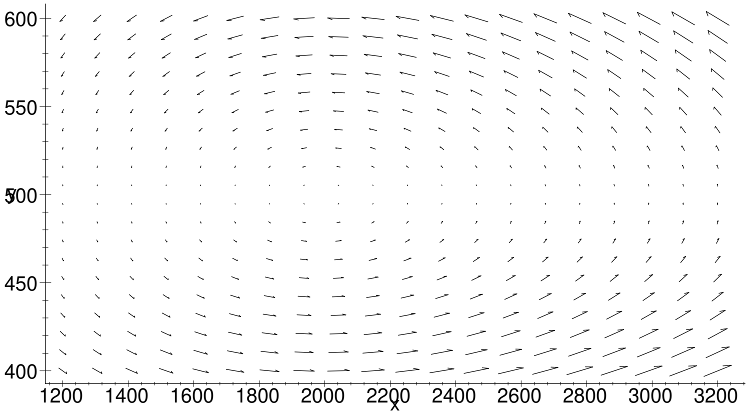


Abb. 17: Das Vektorfeld zur Raubtier-Beutetier-Gleichung

Zum Abschluß der Diskussion von Raubtier-Beutetier-Gleichungen sei noch kurz die praktische Relevanz dieser Gleichungen diskutiert: Natürlich sind die Annahmen dieses Modells viel zu einfach, es gibt kaum je zwei Arten, die völlig isoliert vom Rest der Welt leben. Trotzdem werden die vorhergesagten Zykel beobachtet; beispielsweise sammelte die Hudson Bay Company rund hundert Jahre lang die Daten über gekaufte Felle von Luchsen (Raubtieren) und Schneehasen; diese Anzahlen sollten ungefähr proportional sein zu den jeweiligen Populationszahlen. Abbildung 18 zeigt die erwarteten zyklischen Schwankungen.

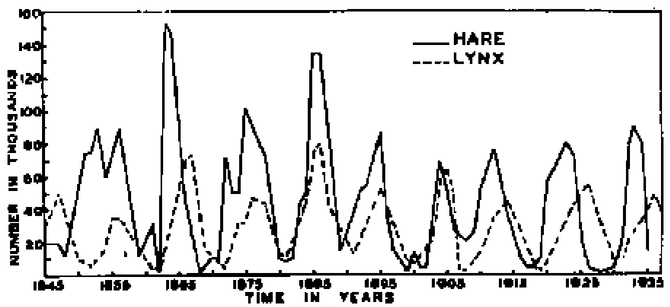


Abb. 18: Luchse und Schneehasen

p) Stabilitätsfragen bei linearen Differentialgleichungen

Um zumindest grundsätzlich zu sehen, was in der Umgebung eines Gleichgewichts passieren kann, betrachten wir die einzige Klasse von Differentialgleichungen, die wir wirklich beherrschen, die linearen homogenen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Falls die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist, gibt es für das System

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$$

genau einen Fixpunkt, nämlich den Nullpunkt. Wir wollen sehen, wie sich Lösungen, die in der Nähe des Nullpunkts starten, weiter entwickeln, d.h. wir wollen sehen, wie sich das Gleichgewicht gegenüber kleinen Störungen verhält.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns zunächst auf den Fall, daß die Matrix A diagonalisierbar ist, daß also für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen ist. Dann können wir eine Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ finden, bezüglich derer das System die Form

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \lambda_1 z_1(t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \dot{z}_n(t) &= \lambda_n z_n(t) \end{aligned}$$

hat mit komplexen Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Die nichtreellen λ_j gruppieren sich dabei zu Paaren konjugiert komplexer Zahlen; wir ordnen die Basisvektoren so an, daß $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ reell sind und danach jeweils Paare λ_s, λ_{s+1} konjugiert komplexer Eigenwerte folgen. Die zugehörigen Basisvektoren $\vec{b}_s$ und $\vec{b}_{s+1}$ können und wollen wir so wählen, daß auch sie konjugiert komplexe Komponenten haben.

Dann können wir die Lösung mit Anfangsbedingung

$$z_1(0) = c_1, \quad \dots, \quad z_n(t) = c_n$$

sofort hinschreiben:

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad z_n(t) = c_n e^{\lambda_n t}.$$

Um reelle Lösungsfunktionen zu erhalten ändern wir die Basis noch einmal ab: Für konjugiert komplexe Eigenwerte λ_s, λ_{s+1} betrachten wir

$$\vec{v}_s = \vec{b}_s - \vec{b}_{s+1} \quad \text{und} \quad \vec{v}_{s+1} = i\big(\vec{b}_s + \vec{b}_{s+1}\big)\ ;$$

dann ist

$$e^{\lambda_s t}\vec{b}_s + e^{\lambda_{s+1} t}\vec{b}_{s+1} = e^{\mu_s t}\cos\omega_s t\vec{v}_s + e^{\mu_s t}\sin\omega_s t\vec{v}_{s+1}\ ,$$

bezüglich der neuen Basis $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_r, \vec{v}_{r+1}, \dots, \vec{v}_n\}$ haben wir also reelle Lösungen der Form

$$z_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad z_r(t) = c_r e^{\lambda_r t}$$

und

$$w_{r+1}(t) = d_{r+1}e^{\mu_{r+1} t}\cos\omega_{r+1}(t), \quad w_{r+2}(t) = d_{r+2}e^{\mu_{r+1} t}\sin\omega_{r+1}(t),$$
$$\dots$$
$$w_{n-1}(t) = d_{n-1}e^{\mu_{n-1} t}\cos\omega_{n-1}(t), \quad w_n(t) = d_n e^{\mu_{n-1} t}\sin\omega_{n-1}(t)\,.$$

Betrachten wir nun das Langzeitverhalten dieser Lösungen!

Falls alle Eigenwerte negativen Realteil haben, gehen alle Komponenten des Lösungsvektors mit wachsendem t gegen Null, also geht auch der Lösungsvektor selbst gegen den Nullvektor, und letztere Aussage ist unabhängig von der gewählten Basis. Egal wie stark die Anfangsbedingung gestört wird, die Lösungsfunktion wird in diesem Fall also stets zum Gleichgewicht zurückkehren. In diesem Fall sagen wir, der Nullpunkt sei ein stabiler Gleichgewichtspunkt, vergleichbar etwa mit einer kleinen Kugel, die im Innern einer größeren Hohlkugel am tiefstmöglichen Punkt liegt: Wenn diese Position aus irgend einem Grund gestört wird, wird die Kugel immer wieder in die Gleichgewichtslage zurückkehren.

Im anderen Extrem haben wir den Fall, daß alle Realteile der Eigenwerte positiv sind. Dann steigen alle Komponenten des Lösungsvektors mit wachsendem t unbeschränkt an, d.h. selbst die kleinste Störung des Gleichgewichts wird immer weiter verstärkt, und das System kehrt nie wieder in den Gleichgewichtszustand zurück. Hier reden wir von einem instabilen Gleichgewicht, vergleichbar etwa mit einer kleinen Kugel,

die ganz oben auf einer großen Kugel liegt. Dort ist sie zwar theoretisch im Gleichgewicht, aber bei der kleinsten Störung fällt sie herunter und kehrt nie wieder aus eigener Kraft in die Ausgangslage zurück.

Falls es sowohl Eigenwerte mit positiven als auch solche mit negativen Realteilen gibt, haben wir auch so etwas wie ein instabiles Gleichgewicht, allerdings wird die Störung nur für einige der Koordinatenfunktionen (bezüglich der Eigenbasis) verstärkt, während sie für andere wieder weggedämpft wird. Hier reden wir von einem Sattelpunkt und können uns eine Kugel vorstellen, die im Scheitelpunkt einer Sattelfläche liegt. Diese Lage ist zwar auch instabil, aber wir wissen wenigstens, in welche Richtung die Kugel verschwindet.

Falls schließlich alle Eigenwerte rein imaginär sind, haben wir periodische Lösungen, d.h. die Störung wird weder gedämpft noch verstärkt, sondern bleibt unverändert erhalten. Dies ist auch der einzige Fall, in dem sich etwas ändert, wenn wir nichtdiagonalisierbare Matrizen zulassen, da dann zu den periodischen Lösungen auch noch Funktionen kommen, die gegen unendlich gehen und somit das Gleichgewicht instabil machen.

Zur Veranschaulichung betrachten wir einige interessante Fälle im Zweidimensionalen: Bei der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -2x(t), \qquad \dot{y}(t) = -3y(t)$$

sind die beiden Eigenwerte reell und negativ; alle Lösungen nähern sich also asymptotisch dem Nullpunkt. Abbildung 19 zeigt einige Lösungskurven und das Vektorfeld. Falls wir die Minuszeichen durch Pluszeichen ersetzen, drehen sich einfach alle Pfeile um und die Lösungen laufen in Gegenrichtung, weg vom Nullpunkt.

Ist dagegen ein Eigenwert positiv und einer negativ, etwa bei

$$\dot{x}(t) = -2x(t), \qquad \dot{y}(t) = 3y(t)\,,$$

so erhalten wir Lösungskurven, die sich asymptotisch der y-Achse annähern, auf dieser aber gegen plus oder minus unendlich gehen; hier ist der Nullpunkt ein zweidimensionaler Sattelpunkt.

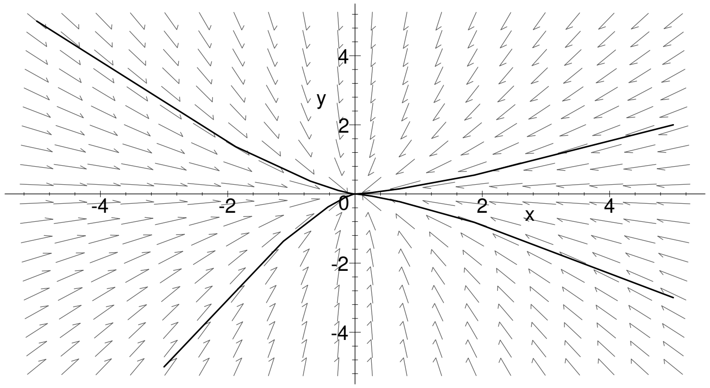


Abb. 19: Zwei negative reelle Eigenwerte

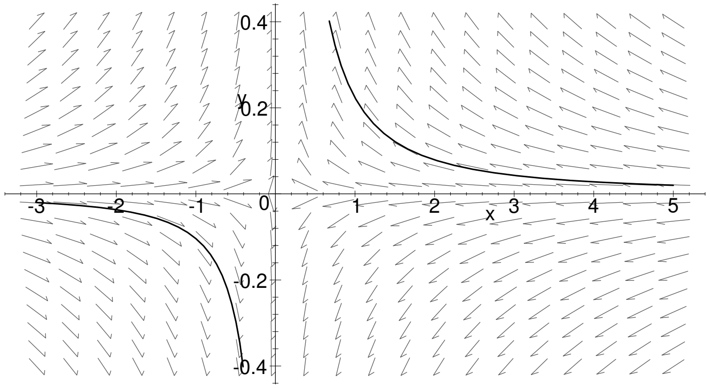


Abb. 20: Der Nullpunkt als Sattelpunkt

Interessanter ist

$$\dot{x}(t) = -x(t)/5 - 5y(t), \qquad \dot{y}(t) = 5x(t) - y(t)/5\,;$$

hier hat die Matrix die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte $-\frac{1}{5} \pm 5i$.

Die Lösungen sind also von der Form

$$x(t) = e^{-t/5}(a\cos 5t + b\sin 5t) \quad \text{und}$$

$$y(t) = e^{-t/5}(a\cos 5t - b\sin 5t)\,,$$

sie gehen also spiralförmig auf den Nullpunkt zu, wie auch in Abbildung 21 zu sehen ist. Umkehrung aller Vorzeichen würde auf die Eigenwerte $2 \pm 5i$ führen, und dann würden alle Lösungen spiralformig vom Nullpunkt weglaufen.

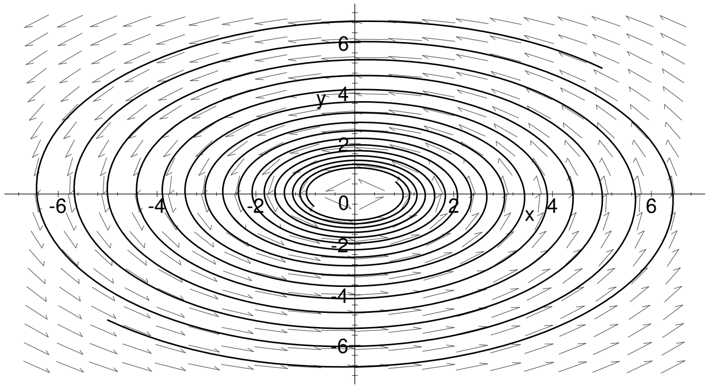


Abb. 21: Zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit negativem Realteil

Im Dreidimensionalen können wir beispielsweise zum gerade betrachteten System noch die dritte Gleichung $\dot{z}(t) = -z(t)/10$ hinzufügen; jetzt läuft die Spirale, wie in Abbildung 22 zu sehen, dreidimensional auf den Nullpunkt zu.

Nehmen wir dagegen als dritte Gleichung $\dot{z}(t) = z(t)/10$, so bekommen wir Lösungskurven, bei denen sich die Spirale zwar immer noch zur z-Achse hin zusammenzieht, aber sie wandert in z-Richtung gegen unendlich, wird also schließlich ununterscheidbar von der z-Achse. Dies ist ein typisches Beispiel, wo der Nullpunkt ein dreidimensionaler Sattelpunkt ist.

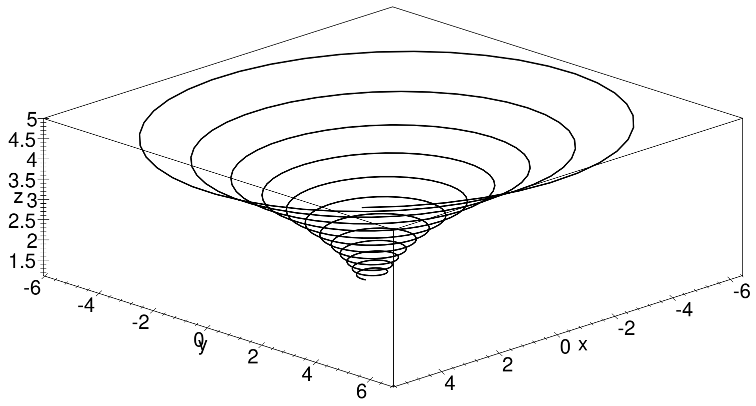


Abb. 22: Zwei konjugiert komplexe und ein negativer reeller Eigenwert

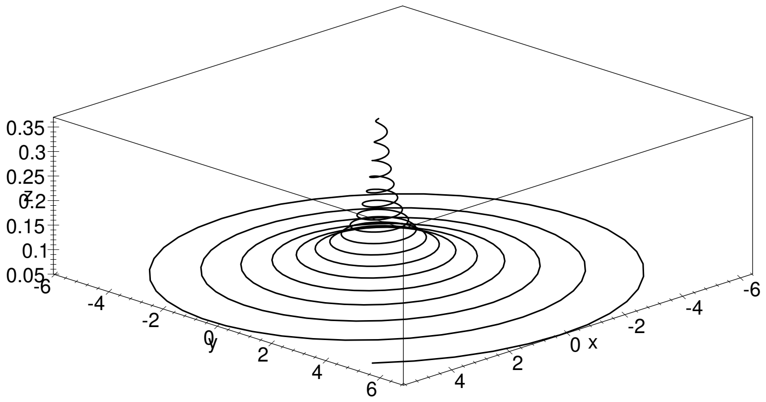


Abb. 23: Zwei konjugiert komplexe und ein positiver reeller Eigenwert

q) Gleichgewichte und Chaos bei nichtlinearen Differentialgleichungen

Bei einem nichtlinearen Differentialgleichungssystem können wir die Natur eines Gleichgewichtspunktes nicht so einfach feststellen wie bei einem linearen, wir können aber zumindest versuchen, das System *lokal*

durch ein lineares System anzunähern. Beim Raubtier-Beutetiersystem

$$\dot{x}(t) = \alpha x(t) - \beta x(t)y(t)$$
$$\dot{y}(t) = -\gamma y(t) + \delta x(t)y(t)$$

etwa haben wir den uninteressanten und offensichtlich instabilen Nullpunkt als Gleichgewicht und den interessanten Punkt

$$x_0 = \frac{\gamma}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\alpha}{\beta}\,.$$

In der Umgebung dieses Punktes schreiben wir

$$x(t) = x_0 + u(t) \quad \text{und} \quad y(t) = y_0 + v(t)\,;$$

Einsetzen und ausmultiplizieren zeigt, daß dann

$$\dot{u}(t) = -\frac{\gamma\beta}{\delta}v(t) - \beta u(t)v(t)$$
$$\dot{v}(t) = \frac{\alpha\delta}{\beta}u(t) + \delta u(t)v(t)$$

ist. In der Nähe des Gleichgewichtspunkts sind sowohl $u(t)$ als auch $v(t)$ klein; ihr Produkt ist noch kleiner und kann daher in erster Näherung vernachlässigt werden. Damit bleibt nur noch das lineare Differentialgleichungssystem

$$\dot{u}(t) = -\frac{\gamma\beta}{\delta}v(t) \quad \text{und} \quad \dot{v}(t) = \frac{\alpha\delta}{\beta}u(t)$$

übrig; seine Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\gamma\beta}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

hat das charakteristische Polynom $\lambda^2 + \alpha\gamma$ mit den beiden rein imaginären Nullstellen

$$\lambda = \pm\sqrt{\alpha\gamma}\, i\,.$$

Das linearisierte Gleichungssystem hat also periodische Lösungen, und die Lösungen des nichtlinearen Systems sind hier einfach Verzerrungen dieser Kreise. Leider können wir das allerdings nicht aus dem linearisierten Gleichungssystem herauslesen: Da wir dort Eigenwerte mit Realteil null haben, hängt es von nichtlinearen Effekten ab, ob die Lösungen des

Ausgangssystems wie im vorliegenden Fall periodisch sind oder aber spiralförmig auf den Fixpunkt zu- oder von ihm weglaufen.

Ein interessanteres Beispiel sind die LORENZ-Gleichungen

$$\dot{x}(t) = p\big(y(t) - x(t)\big)$$
$$\dot{y}(t) = rx(t) - y(t) - x(t)z(t)$$
$$\dot{z}(t) = -bz(t) + x(t)y(t)\,.$$

Dieses System ist eine extreme Vereinfachung der sogenannten NAVIER-STOKES-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung, die Strömungsphänomene beschreibt. Für technische Informatiker interessanter ist wohl, daß dieselbe Gleichung nach HAKEN (Phys. Lett. A53 (1975), 77–78) auch das Verhalten von Lasern beschreiben kann. Die Funktionen $x(t), y(t)$ und $z(t)$ verlieren im Vereinfachungsprozeß ihre unmittelbare physikalische Bedeutung; die Parameter lassen sich allerdings physikalisch interpretieren: Für die atmosphärische Konvektion ist nach LORENZ

$$p = 10, \quad r = 28 \quad \text{und} \quad b = \frac{8}{3}$$

eine sinnvolle Wahl.

EDWARD NORTON LORENZ wurde 1917 im US-Bundesstaat Connecticut geboren; er studierte Mathematik in Dartmout College (A.B. 1938) und Harvard (M.A. 1940). Nach seinem Kriegsdienst ging er ans MIT, wo er 1948 über Meteorologie promovierte. Sowohl dem MIT, wo er 1981 als Professor emeritiert wurde, als auch der Meteorologie blieb er fortan treu. Zu seinen vielen Auszeichnungen gehört unter anderem der Kyoto-Preis von 1991, der wohl höchstdotierte Wissenschaftspreis.

Da uns der erste Augenschein nichts über das Verhalten der Lösungen zeigt, empfiehlt es sich, daß wir uns durch numerische Simulation einen ersten Eindruck verschaffen. Abbildung 24 zeigt die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$; die meisten werden ähnliche Bilder wohl schon gesehen haben.

Leider ist dieses Bild einerseits etwas unübersichtlich, andererseits zeigt es nur eine einzige Lösungskurve. Um besser zu verstehen, was hier passiert, beschränken wir uns auf die Funktion $x(t)$ und betrachten diese

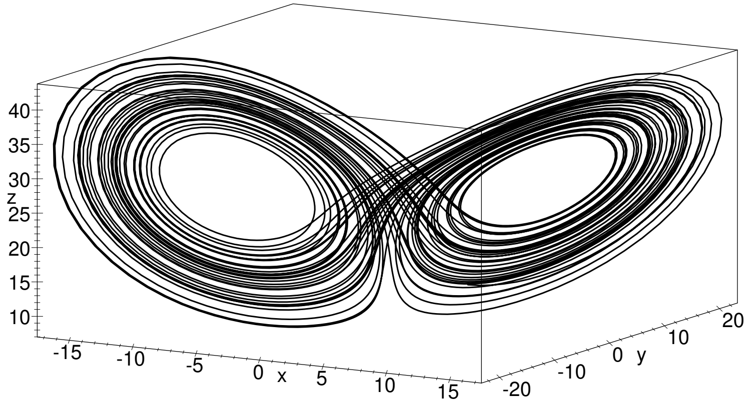


Abb. 24: Eine Bahnkurve des LORENZ-Systems

für zwei Lösungskurven; Abbildung 25 zeigt die für die Anfangsbedingungen

$$x(0) = 2, \quad y(0) = z(0) = 10 \quad \text{und} \quad x(0) = 2{,}01, \quad y(0) = z(0) = 10\,.$$

Wie man sieht, sind die beiden Lösungskurven bis etwa zum Zeitpunkt $t = 6{,}5$ praktisch ununterscheidbar, danach gehen sie aber recht schnell auseinander und haben ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun.

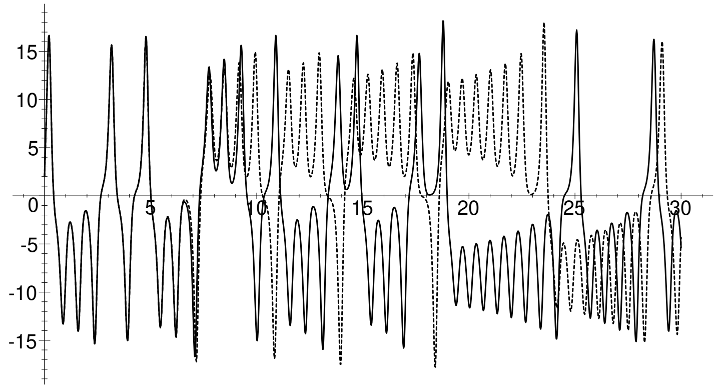


Abb. 25: Die x-Koordinaten zweier Lösungen mit benachbarten Anfangswerten

Fast das gleiche Bild ergibt sich, wenn wir die gestrichelte Kurve nicht mit $x(0) = 2{,}01$ anfangen lassen, sondern – bei sonst unveränderten Werten – bei

$$x(0) = 2{,}000001 = 2 + 10^{-6}\,.$$

Jetzt sind die Kurven zwar bis etwa $t = 16$ praktisch ununterscheidbar, aber spätestens ab etwa $t = 20$ haben sie auch hier nichts mehr miteinander zu tun.

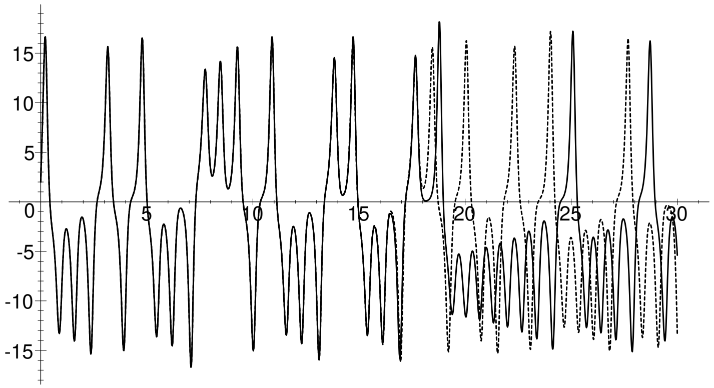


Abb. 26: Effekt einer Störung des Anfangswerts um 10^{-6}

Gerade beim zweiten Fall sollte uns das zu denken geben: Wenn wir Differentialgleichungen zur Vorhersage benutzen, stammen die Anfangsbedingungen im allgemeinen aus einer Messung. Man kann aber nur selten so genau messen, daß sich die beiden Werte 2 und 2,000001 unterscheiden ließen; um eine sinnvolle Voraussage über das Verhalten der Lösung zum Zeitpunkt $t = 20$ zu machen, *muß* man aber nach Abbildung 26 den Wert $x(0)$ mit dieser Genauigkeit kennen.

Es kommt noch schlimmer: In Abbildung 27 ist die dick ausgezogene Kurve wieder eine numerische Simulation der Lösung zu den Anfangsbedingungen $x(0) = 2$ und $y(0) = z(0) = 10$, die gestrichelte Kurve allerdings auch! Die beiden Kurven unterscheiden sich nur dadurch, daß die numerische Simulation bei der dick ausgezogenen Kurve (wie

auch bei allen anderen bisherigen Kurven) mit Schrittweite 0,02 arbeitete, wohingegen die Schrittweite für die gestrichelte Kurve mit 0,01 nur halb so groß war. Auch das reicht schon, daß die Kurven ab etwa $t = 10$ nichts mehr miteinander zu tun haben, und damit dürfte wohl auch klar sein, daß keine der bislang betrachteten Kurven für größere Werte von t irgendetwas mit der „wahren“ Lösungsfunktion $x(t)$ zu tun hatte.

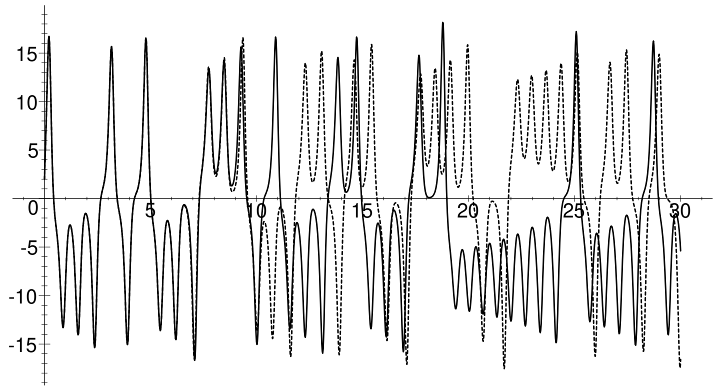


Abb. 27: Effekt einer Schrittweitenhalbierung bei der numerischen Simulation

LORENZ mußte dieses Verhalten der Lösungen auf die harte Weise lernen: Er fand zu seinem großen Erstaunen, daß sich seine Rechenergebnisse nicht reproduzieren ließen, wenn er Zwischenergebnisse für Kontrollrechnungen nur in gerundeter Form eintippte: Der geringe Rundungsfehler bei der Eingabe des Startwerts reichte bereits aus, um das Langzeitverhalten des Systems grundlegend zu verändern.

Falls das gleiche Phänomen auch in der wirklichen Atmosphäre auftritt, können also minimale Veränderungen etwa des Luftdrucks oder der Temperatur auf längere Sicht zu einer dramatisch anderen Entwicklung des Wetters führen – eine Idee, die vielen Meteorologen damals als zu phantastisch erschien um ernstgenommen zu werden: Am 22. Januar 1963 berichtete LORENZ vor der New York Academy of Sciences über seine Ergebnisse *(Trans. N.Y. Acad. Sci.* **25** *(1963), 409–432)* und schloß seinen Vortrag mit den Worten:

Als die Instabilität eines gleichförmigen Flusses gegenüber infinitesimalen Störungen erstmals als Erklärung für das Auftreten von Zyklonen und Antizyklonen in der Atmosphäre vorgeschlagen wurde, war diese Idee nicht allgemein akzeptiert. Ein Meteorologe bemerkte, daß, falls die Theorie korrekt wäre, ein Flügelschlag einer Möwe ausreichen würde, um die Entwicklung des Wetters für immer zu verändern. Die Kontroverse ist noch nicht entschieden, aber die neueste Evidenz scheint für die Möwen zu sprechen.

Inzwischen ist der Sieg der Möwen bekanntlich allgemein anerkannt; man fordert sogar nicht einmal mehr den relativ kräftigen Flügelschlag einer Möwe, um das Wetter permanent zu verändern: Im Dezember 1972 hielt LORENZ vor der American Association for the Advancement of Sciences in Washington, DC, einen Vortrag mit dem Titel *Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas,* und seitdem geht das Wort vom *Schmetterlingseffekt* um die Welt.

Auch das Wort *Chaos* wird heute meist auf diese Weise definiert: Kleinste Änderungen bei den Anfangsbedingungen führen zu dramatischen Veränderungen des Langzeitverhaltens. Allerdings muß man hier aufpassen: Bei der Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

mit Anfangsbedingungen

$$y(0) = 1 \quad \text{und} \quad y(0) = 1 + \varepsilon$$

unterscheiden sich die Lösungen $y(t) = e^t$ und $y(t) = (1 + \varepsilon) \cdot e^t$ zur Zeit t um $\varepsilon \cdot e^t$, was auch bei kleinsten ε-Werten sehr schnell eine sehr große Zahl wird: bei $\varepsilon = 10^{-6}$ und $t = 50$ etwa ist die Differenz bereits größer als $5 \cdot 10^{15}$. Trotzdem wird hier niemand von Chaos reden, denn beide Lösungen gehen sehr schnell gegen den „Gleichgewichtspunkt" unendlich. Von „echtem" Chaos verlangt man daher auch noch, daß die Lösungen nicht gegen eine (endliche oder unendliche) Gleichgewichtslösung konvergieren und auch nicht gegen eine periodische Lösung. Chaos in diesem Sinne ist sehr schwer nachzuweisen; für die LORENZ-Gleichung mit den klassischen Parameterwerten wurde erst Ende September 1999 ein *preprint* veröffentlicht, in dem dies (mit

großem theoretischen wie auch rechnerischem Aufwand) gezeigt wird; siehe `http://www.math.gatech.edu/~mischaik/papers/lor3.ps`.

Chaos heißt nun allerdings nicht, daß wir dann überhaupt nichts über das Verhalten der Lösungen aussagen können. Beispielsweise können wir bereits mit unseren einfachen Mitteln zeigen, daß das Bild in Abbildung 24 zumindest qualitativ das Verhalten der Lösungskurven korrekt wiedergibt – quantitativ ist natürlich ab spätestens etwa $t = 10$ alles falsch.

Dazu berechnen wir zunächst die Gleichgewichtslösungen: Im Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= p(y - x) \\ 0 &= rx - y - xz \\ 0 &= -bz + xy \end{aligned}$$

zeigt die erste Gleichung, falls wir den uninteressanten Fall $p = 0$ ausschließen, daß die x-Koordinate und die y-Koordinate eines jeden Fixpunkts übereinstimmen müssen.

Falls beide Koordinaten verschwinden, zeigt die dritte Gleichung ($b \neq 0$ vorausgesetzt), daß dann auch die z-Koordinaten verschwinden muß; Einsetzen in die Gleichungen zeigt, daß der Nullpunkt in der Tat ein Fixpunkt ist.

Im Fall $x \neq 0$ können wir y in der zweiten Gleichung durch x ersetzen und dann durch x dividieren; dies ergibt die z-Koordinate

$$z = r - 1\,.$$

Damit zeigt die dritte Gleichung, daß es für $r \neq 1$ noch zwei weitere Fixpunkte gibt mit

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r - 1\,.$$

Betrachten wir zunächst den Nullpunkt. In dessen unmittelbarer Umgebung sind die beiden quadratischen Terme xz und xy klein im Verhältnis zu den linearen Termen, wir machen also wohl keinen allzu großen Fehler, wenn wir sie einfach vernachlässigen. Dies führt auf das lineare homogene System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= p\big(y(t)-x(t)\big)\\ \dot{y}(t) &= rx(t)-y(t)\\ \dot{z}(t) &= -bz(t)\end{aligned}$$

mit Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -p & p & 0\\ r & -1 & 0\\ 0 & 0 & -b\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix läßt sich leicht berechnen: Entwicklung von $\det(A-\lambda E)$ nach der dritten Zeile (oder Spalte) ergibt

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda E) &= -(b+\lambda)\big((\lambda+p)(\lambda+1)-rp\big)\\ &= -(b+\lambda)\big(\lambda^2+(p+1)\lambda+p(1-r)\big)\,.\end{aligned}$$

Die drei Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -b$ mit der z-Achse als Eigenraum und

$$\lambda_{2/3} = -\frac{p+1}{2} \pm \sqrt{p(r-1)-\left(\frac{p+1}{2}\right)^2}\,.$$

Bei den von LORENZ gewählten Werten $p = 10$ und $r = 28$ ergibt sich

$$\lambda_{2/3} = -\frac{11}{2} \pm \sqrt{270-\frac{121}{4}} = -\frac{11}{2} \pm \frac{\sqrt{959}}{2}\,.$$

Damit haben wir, wegen $b = 8/3$, einen positiven und zwei negative Eigenwerte. Die beiden negativen Eigenwerte sorgen dafür, daß eine Lösungskurve, die durch einen Punkt in der Nähe des Nullpunkts geht, in den Eigenraum des positiven Eigenwerts gedrückt wird, aber dieser sorgt dann dort dafür, daß die Kurve in Richtung Unendlichkeit entschwindet.

Bei den beiden anderen Fixpunkten müssen wir etwas mehr rechnen: Für

$$x = y = \pm\sqrt{b(r-1)} \quad \text{und} \quad z = r-1$$

führen wir, wie oben beim Raubtier-Beutetier-System neue Variablen u, v und w ein, die den Abstand zum Fixpunkt beschreiben, d.h.

$$x = \pm\sqrt{b(r-1)}+u, \quad y = \pm\sqrt{b(r-1)}+v \quad \text{und} \quad z = r-1+w\,.$$

Einsetzen und Ausmultiplizieren zeigt, daß wir dann das neue Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= p\big(v(t)-u(t)\big)\\ \dot{v}(t) &= u(t)-v(t) \mp \sqrt{b(r-1)}w(t)-u(t)w(t)\\ \dot{w}(t) &= \pm\sqrt{b(r-1)}\big(u(t)+v(t)\big)-bw(t)+u(t)v(t)\,.\end{aligned}$$

In der Nähe des Gleichgewichtspunkt sind $u(t), v(t)$ und $w(t)$ klein, wir können dort also die beiden Produkte $u(t)w(t)$ und $u(t)v(t)$ in erster Näherung vernachlässigen und erhalten somit das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix}\dot{u}(t)\\ \dot{v}(t)\\ \dot{w}(t)\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}u(t)\\ v(t)\\ w(t)\end{pmatrix}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -p & p & 0\\ 1 & -1 & \mp\sqrt{b(r-1)}\\ \pm\sqrt{b(r-1)} & \pm\sqrt{b(r-1)} & -b\end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom

$$\det(A-\lambda E) = -\lambda^3-(b+1+p)\lambda^2-b(r-p)\lambda-2pb(r-1)$$

ist für beide Fixpunkte dasselbe, verleitet aber nicht dazu, es allgemein lösen zu wollen. Wir setzen daher die von LORENZ vorgeschlagenen speziellen Parameterwerte ein und erhalten

$$-\lambda^3-\frac{41}{3}\lambda^2-\frac{304}{3}\lambda-1440\,,$$

was immer noch so schlimm ist, daß wir es besser numerisch lösen. Die drei Lösungen ergeben sich näherungsweise als

$$-13{,}85457791 \quad \text{und} \quad 0{,}09395562396 \pm 10{,}19450522i\,.$$

Es gibt also einen negativen Eigenwert und zwei konjugiert komplexe Eigenwerte mit positivem Realteil. Damit ist klar, wie Lösungskurven des linearisierten Systems in der Nähe der beiden Fixpunkte aussehen: Der negative Eigenwert sorgt dafür, daß die Lösungen asymptotisch

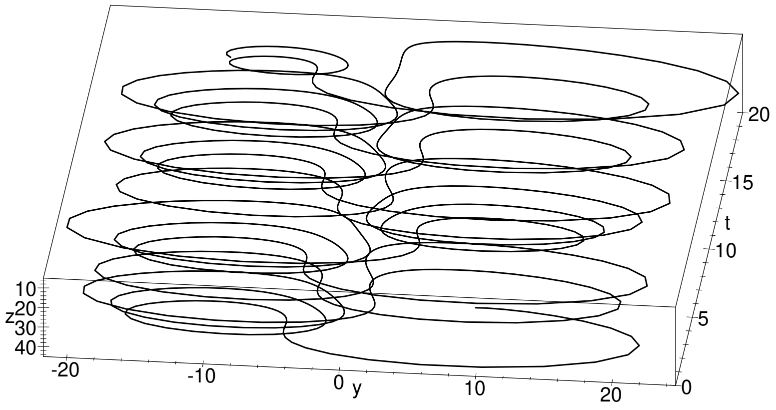


Abb. 28: y- und z-Koordinate als Funktion von t

in die Ebene gedrückt werden, die von den Eigenvektoren zu den beiden anderen Eigenwerten aufgespannt wird, und die beiden komplexen Eigenwerte sorgen dafür, daß sie dort spiralförmig nach außen gehen.

Damit wird das Verhalten des LORENZ-Systems klar: Wir haben zwei Ebenen, die jeweils einen Sattelpunkt enthalten; kommt eine Lösung in die Nähe eines solchen Sattelpunkts, wird sie von der entsprechenden Ebenen eingefangen und geht dort spiralförmig nach außen. Wenn sie sich hinreichend weit vom Sattelpunkt entfernt hat, sind die Voraussetzungen für die obige Linearisierung nicht mehr gegeben; die Lösung kann daher der Ebenen entkommen, wird aber über kurz oder lang von der Ebenen des anderen Sattelpunkts eingefangen und so weiter. Abbildung 28 zeigt dieses Verhalten etwas klarer als Abbildung 24: Hier sind die die y- und die z-Koordinate der Lösungskurve über der Zeit aufgetragen.

Kapitel 3
Differential- und Integralrechnung mehrerer Veränderlicher

Wir mußten bereits im letzten Kapitel teilweise mit Funktionen mehrerer Veränderlicher arbeiten und kennen auch schon deren partielle Ableitungen; es wird höchste Zeit, daß wir uns systematisch mit diesen Funktionen und ihren Eigenschaften befassen.

Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ läßt sich in der Form

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \bigl(f_1(x_1, \dots, x_n),\ \dots\ , f_m(x_1, \dots, x_n)\bigr)$$

schreiben mit m Funktionen $f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Somit spielt der Fall $m = 1$ eine fundamentale Rolle und verdient es, vorab behandelt zu werden.

§1: Skalarwertige Funktionen mehrer Veränderlicher

Wir bezeichnen Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als *skalarwertig,* da wir gewohnt sind, Elemente von $\mathbb{R}^n$ als Vektoren, solche von $\mathbb{R}$ aber als Skalare zu bezeichnen.

Falls wir allerdings Elemente von $\mathbb{R}^n$ wirklich als *Vektoren* betrachten wollen, entspricht dies einerseits nicht der Sichtweise der Analysis, die an Punkte denkt und nicht an Pfeile oder die daraus abgeleiteten Vektoren; außerdem wäre es auch schrecklich, wenn wir immer

$$f\left(\vec{x}\right)$$

schreiben müßten, um einen einfachen Funktionswert zu bezeichnen. Die Alternative

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

ist auch nicht gerade attraktiv: Bei komplizierteren Formeln werden die Ausdrücke dann leicht mehrzeilig und damit unübersichtlich und schwer lesbar.

Ein in der Mathematik häufig gewählter Ausweg besteht darin, daß man

$$x \underset{\text{def}}{=} (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

schreibt; eine soweit völlig klare und verständliche Abkürzung, die wir auch in dieser Vorlesung benutzen werden.

Nun gibt es aber (zum Glück) nur wenige Puristen, die in den besonders interessanten Fällen des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ die Koordinaten mit x_1, x_2 und gegebenenfalls noch x_3 bezeichnen; der Rest schreibt x, y *bzw.* x, y, z. Damit hat man dann im $\mathbb{R}^3$ die zunächst äußerst verwirrende Abkürzung

$$f(x) = f(x, y, z)\,.$$

Mit etwas Übung läßt die Verwirrung schnell nach: Wenn eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ nur ein Argument hat, *muß* es sich dabei um einen Punkt des $\mathbb{R}^3$ halten; wenn sie drei Argumente hat, kann es sich dabei nur um Koordinaten halten, so daß es nicht schwer sein sollte, die unterschiedliche Bedeutung von x in den beiden Ausdrücken

$$f(x) \quad \text{und} \quad f(x, y, z)$$

zu erkennen.

Hier im Skriptum – im Gegensatz zur Vorlesung – ist es möglich, die anfängliche Verwirrung noch etwas zu reduzieren: Ich werde Punkte im $\mathbb{R}^n$ durch Fettdruck kennzeichnen, während Koordinaten in Normalschrift geschrieben werden; hier im Skriptum ist also

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

was beispielsweise im $\mathbb{R}^3$ üblicherweise in der Form

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z) \quad \text{und} \quad f(\boldsymbol{x}) = f(x, y, z)$$

erscheinen wird.

Nur auf den ersten Blick seltsam ist die Verknüpfung von Punkten mit Vektoren: Vektoren, wie wir sie im letzten Semester kennengelernt

haben, sind Äquivalenzklassen von Pfeilen, und die Anwendung eines solchen Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ auf einen Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ besteht natürlich darin, daß man den Punkt $\boldsymbol{x}$ um den Vektor $\vec{v}$ verschiebt: Die Gleichung

$$\boldsymbol{x} + \vec{v} = \boldsymbol{y}$$

bedeutet also nichts anderes, als daß $\boldsymbol{y}$ aus $\boldsymbol{x}$ durch Verschiebung um $\vec{v}$ entsteht oder, anschaulicher, daß der Vektor $\vec{v}$ durch einen Pfeil mit Anfangspunkt $\boldsymbol{x}$ und Endpunkt $\boldsymbol{y}$ repräsentiert werden kann.

In Formeln ist diese Addition die gewöhnliche Addition in $\mathbb{R}^n$: Mit

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\boldsymbol{x} + \vec{v} = (x_1 + v_1, \ldots, x_n + v_n)\,.$$

Dies reicht hoffentlich als bürokratischer Teil der Vorbereitung, als nächstes wollen wir uns überlegen, wie man sich eine Funktion mehrerer Veränderlicher veranschaulichen kann.

Für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind wir gewohnt, deren Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y = f(x) \right\}$$

zu zeichnen; entsprechend können wir natürlich auch für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ den Graphen

$$\Gamma_f \underset{\text{def}}{=} \left\{ (\boldsymbol{x}, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;\middle|\; y = f(\boldsymbol{x}) \right\}$$

definieren; da dieser in $\mathbb{R}^{n+1}$ liegt, ist er allerdings nur für $n = 2$ wirklich anschaulich, und auch da kann es bei komplizierten Funktionen stark von der gewählten Perspektive abhängen, was man sieht. Für einfache Funktionen zweier Veränderlicher jedoch ist der Graph sicherlich die einfachste Methode der Veranschaulichung. Beim Graphen der Funktionen

$$f\colon \begin{cases} [-1,1] \times [-1,1] & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

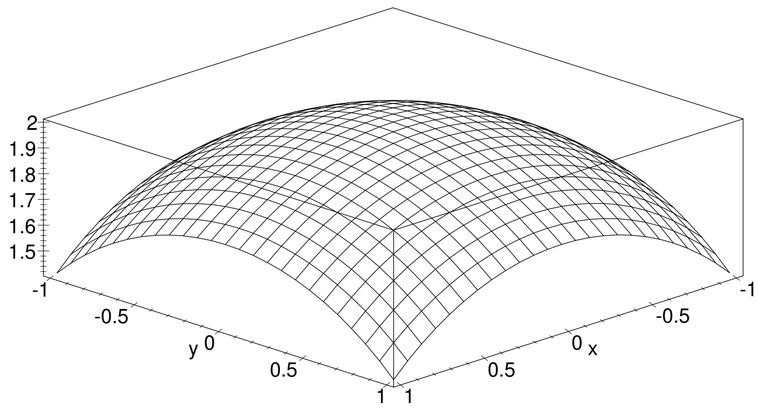


Abb. 29: Graph der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

in Abbildung 29 etwa sieht man recht gut, daß Γ_f Teil einer Kugeloberfläche ist.

Eine andere Möglichkeit zur Veranschaulichung von Funktionen zweier Veränderlicher ist von topographischen Karten her bekannt: Dort wird die Höhe über dem Meeresspiegel, eine Funktion der beiden Ebenenkoordinaten, dargestellt durch *Höhenlinien.* Entsprechend können wir für eine beliebige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und jeden Wert $c \in \mathbb{R}$ die *Niveaulinie*

$$N_c(f) \underset{\text{def}}{=} \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x,y) = c\right\}$$

definieren; sie muß natürlich keine „Linie“ sein, sondern kann auch nur aus einigen Punkten bestehen, leer sein oder – im Falle einer konstanten Funktion – für einen Wert c aus dem gesamten Definitionsbereich D der Funktion bestehen.

Im Falle des obigen Beispiels etwa ist $N_c(f)$ für $c > 2$ und für $c < \sqrt{2}$ die leere Menge; für $c = 2$ besteht sie nur aus dem Nullpunkt, und für $c = \sqrt{2}$ aus den vier Punkten $(0, \pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$. Für $\sqrt{2} < c < 2$ erhalten wir die in Abbildung 30 für $c = 1{,}5$ bis $c = 2$ in Schritten von 0,05 dargestellten Kreislinien

$$\sqrt{4 - x^2 - y^2} = c \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 4 - c^2\,,$$

eingeschränkt natürlich auf das Einheitsquadrat als dem Definitionsbereich von f.

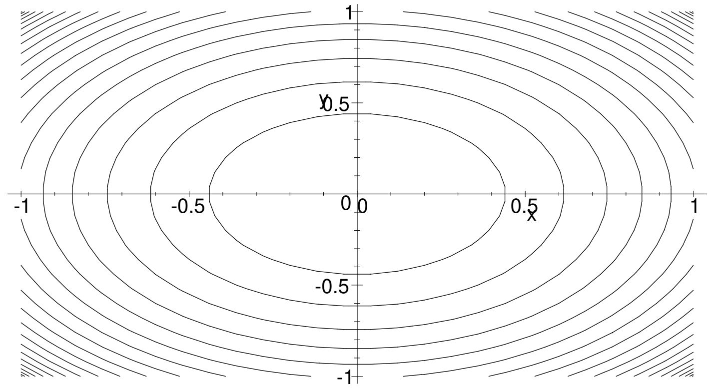


Abb. 30: Niveaulinien der Funktion $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen ist die Visualisierung naturgemäß schwieriger; wir können Graphen und Nivealinien, -flächen *usw.* zwar problemlos definieren, aber nicht mehr zeichnen – es sei denn, es handelt sich um sehr einfache Niveauflächen im $\mathbb{R}^3$.

Ansonsten gibt es für Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen im allgemeinen keine andere Möglichkeiten, als einen Teil der Variablen auf interessanten Werten festzuhalten und die so eingeschränkte Funktion darzustellen. Dies gibt natürlich kein vollständiges Bild der Funktion.

Als Beispiel für die Vor- und Nachteile von Graph und Niveaulinien wollen wir die Stetigkeit einer Funktion anhand beider Darstellungen zu erraten versuchen. Zunächst die Definition:

Definition: Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt stetig im Punkt $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jeden Punkt $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in D$ gilt: Falls $|y_i - x_i| < \delta$ ist für alle i, dann ist $|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$.

Anstelle der Bedingung, daß alle $|y_i - x_i| < \delta$ sein sollen, hätten wir natürlich genauso gut fordern können, daß der EUKLIDische Abstand von $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$ kleiner als δ sein soll; die Zahlenwerte für δ hätten sich dadurch zwar eventuell geändert, aber da jeder n-dimensionale Würfel in eine n-dimensionale Kugel eingebettet werden kann und umgekehrt definiert beides genau die gleiche Stetigkeit.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases} .$$

Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion offensichtlich stetig, denn dort ist sie nur durch Grundrechenarten definiert und Division durch Null ist ausgeschlossen, da x^2+y^4 nur im Nullpunkt verschwindet; die gleichen Überlegungen wie für Funktionen einer Veränderlichen (**[Ba]**, §2.3, *(3.4+5)*) zeigen, daß dies für die Stetigkeit ausreicht.

Bleibt also der Punkt $(0,0)$ zu untersuchen.

Der Graph von f in einer kleinen Umgebung von $(0,0)$ ist in Abbildung 31 zu sehen. Er zeigt zwar einen relativ steilen Sprung entlang der Geraden $x = 0$, aber nur für die etwas weiter vom Nullpunkt entfernten x-Werte; bei $y = 0$ sieht alles harmlos und eben aus.

Nun ist der abgebildete Graph natürlich von einem Computer anhand von nur endlich vielen Stützpunkten konstruiert; um wirklich zu entscheiden, ob f im Nullpunkt stetig ist, können wir uns nicht auf diese Approximation verlassen, sondern müssen die Funktion etwas genauer untersuchen.

Da wir uns im Eindimensionalen recht gut auskennen, können wir beispielsweise die Einschränkungen von f auf die verschiedenen Geraden durch den Nullpunkt betrachten. Abgesehen von der y-Achse haben diese alle die Form $y = ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, und

$$f(x,ax) = \frac{2x\cdot(ax)^2}{x^2+(ax)^4} = \frac{2ax^3}{x^2(1+ax^2)} = \frac{2ax}{1+ax^2}$$

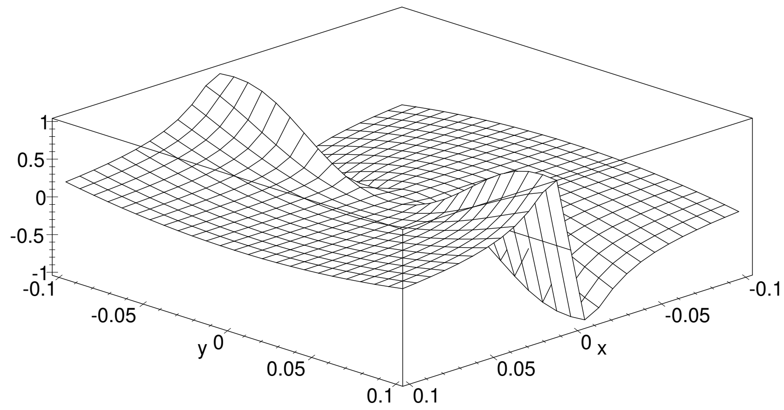


Abb. 31: Ist diese Funktion stetig?

für $x \neq 0$. Für $x \to 0$ geht beim rechtsstehenden Ausdruck der Zähler gegen Null und der Nenner gegen eins; der Grenzwert existiert also und ist gleich $f(0,0) = 0$, d.h. die Einschränkung von f ist stetig auf der Geraden $y = ax$.

Auf der y-Achse verschwindet f für jeden Wert von x, ist also ebenfalls stetig, d.h. die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt ist stetig.

Betrachten wir zur Vorsicht auch noch die Einschränkung von f auf die Parabel $x = ay^2$! Dort ist

$$f(ay^2,y) = \frac{2ay^2\cdot y^2}{a^2y^4+y^4} = \frac{2ay^4}{(1+a^2)y^4} = \frac{2a}{1+a^2}$$

für alle $y \neq 0$, wohingegen $f(0,0) = 0$ ist. Für $a \neq 0$ ist die Einschränkung von f auf diese Parabel also nicht stetig, und damit kann auch f nicht stetig sein, denn für eine stetige Funktion muß schließlich

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

unabhängig davon sein, auf welchem Weg der Punkt (x,y) gegen $(0,0)$ wandert.

Zusammen mit den Koordinatenachsen überdecken die Parabeln $x = ay^2$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ den gesamten $\mathbb{R}^2$, die Niveaulinie $N_0(f)$ von f besteht also aus den beiden Koordinatenachsen, während die anderen Niveaulinien aus Parabeln $x = ay^2$ jeweils ohne den Nullpunkt bestehen; siehe Abbildung 32. Da die Gleichung

$$\frac{2a}{1+a^2} = c$$

für $c \neq 0$ die beiden Lösungen

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1-c^2}}{c}$$

hat, besteht jede Niveaulinie für $0 < |c| < 1$ aus zwei dieser Parabeln, für $|c| = 1$ aus einer, und für $|c| > 1$ ist $N_c(f) = \emptyset$.

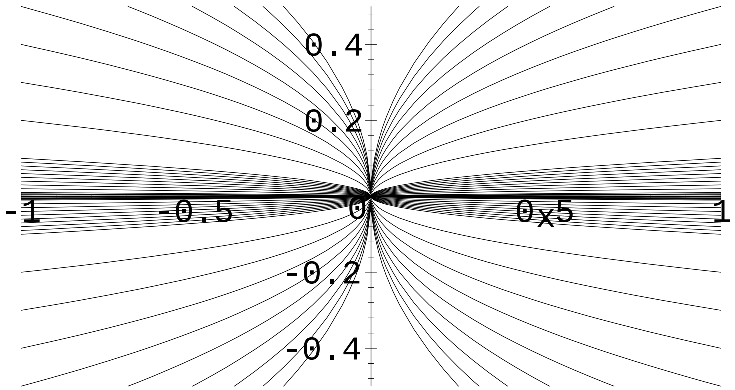


Abb. 32: Die Niveaulinien illustrieren die Unstetigkeit im Nullpunkt

Auch Abbildung 32 zeigt, daß f im Nullpunkt unstetig ist, denn alle Niveaulinien kommen dem Nullpunkt beliebig nahe, obwohl dieser nur auf $N_0(f)$ liegt. Daran sehen wir übrigens auch, daß der Graph in Abbildung 31 falsch ist: In jeder Umgebung von $(0,0)$ wird jeder Wert c zwischen -1 und 1 angenommen, der Abschluß des Graphen enthält also die Strecke $[-1,1]$ auf der z-Achse. In Abbildung 31 ist dies nicht

zu sehen, da Maple, wie die meisten Computergraphikprogramme, zum Zeichnen nur die Linien $x =$ konstant und $y =$ konstant berücksichtigt.

Bei Funktionen, in deren Definition Fallunterscheidungen eingehen, ist also größere Vorsicht geboten als im Eindimensionalen; bei in der Praxis auftretenden Funktionen wird es allerdings wohl meist so sein, daß die Unstetigkeitsstellen genau dort auftreten, wo man Sprünge definiert hat. Schwierig wird es nur, wenn man wie im obigen Beispiel in einem Punkt eine Situation der Art „$0/0$“ hat und entscheiden muß, ob man stetig ergänzen kann: Hier hilft im Mehrdimensionalen keine DE L'HOSPITALsche Regel, es hilft auch nicht, die Annäherung der Funktion an den problematischen Punkt aus allen Richtungen zu untersuchen, sondern man muß wirklich auf die Definition der Stetigkeit zurückgehen.

Als nächstes möchte ich auf die *Differenzierbarkeit* von Funktionen eingehen, als erstes im wohlbekannten Fall einer Funktion auf einem Intervall $(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Rein formal betrachtet ist $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt $x \in (a,b)$, wenn der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

existiert; sein Wert wird dann als Ableitung von f im Punkt x bezeichnet.

Hier und im folgenden wird oft die LANDAUsche o-Notation nützlich sein: Wir schreiben $o(h)$, sobald wir *irgendeine* uns nicht weiter interessierendeFunktion von h haben, die für $h \to 0$ schneller gegen null geht als h selbst, d.h.

$$\varphi(h) = o(h) \iff \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h} = 0\,.$$

$o(h)$ ist hier also keine Funktion, sondern steht für eine ganze Klasse von Funktionen; beispielsweise ist

$$h^2 = o(h), \quad h^5 = o(h) \quad \text{und} \quad h \cdot \sin h = o(h)\,,$$

aber $\sin h$ können wir nicht als $o(h)$ schreiben, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1\,.$$

Entsprechend schreiben wir auch

$$\varphi(h) = o\big(\psi(h)\big), \quad \text{wenn} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{\psi(h)} = 0$$

ist.

EDMUND GEORG HERMANN LANDAU (1877–1938) wurde in Berlin geboren und studierte an der dortigen Universität, wo er auch von 1899 bis 1909 lehrte. Dann bekam er einen Ruf an die damals führende deutsche Mathematikfakultät in Göttingen. 1933 verlor er seinen dortigen Lehrstuhl, denn die Studenten boykotierten seine Vorlesungen, da sie meinten, sie könnten Mathematik nur von einem Professor ihrer eigenen Rasse lernen. LANDAUS zahlreiche Publikationen beschäftigen sich vor allem mit der Zahlentheorie, über die er auch ein bedeutendes Lehrbuch schrieb; sehr bekannt sind seine Arbeiten über die Verteilung von Primzahlen.

Mit LANDAUS o-Notation können wir auch sagen, die Funktion f sei genau dann differenzierbar in x mit Ableitung $f'(x)$, wenn

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + o(h)$$

ist, denn das bedeutet gerade, daß

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - \big(f(x) + hf'(x)\big)}{h} = 0\,.$$

Anschaulich können wir das auch so interpretieren, daß für kleine h

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)\,,$$

ist, d.h. die Funktion f sieht in einer hinreichend kleinen Umgebung von x aus wie eine lineare Funktion. Die Abbildungen 33 bis 36 zeigen dies für $f(x) = \sin x$ in der Umgebung von $x = 1$, wobei diese Umgebung von einer Abbildung zur nächsten jeweils um den Faktor fünf vergrößert wird.

Im Zweidimensionalen können wir ganz entsprechend vorgehen: Wenn wir etwa die Funktion $f(x,y) = \sin x \cos y$ auf $\mathbb{R}^2$ in der Umgebung des Punktes $(1,1)$ betrachten und diese wieder sukzessive um den Faktor fünf vergrößern, erhalten wir die Abbildungen 37 bis 40, die zeigen, daß sich der Graph der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung des

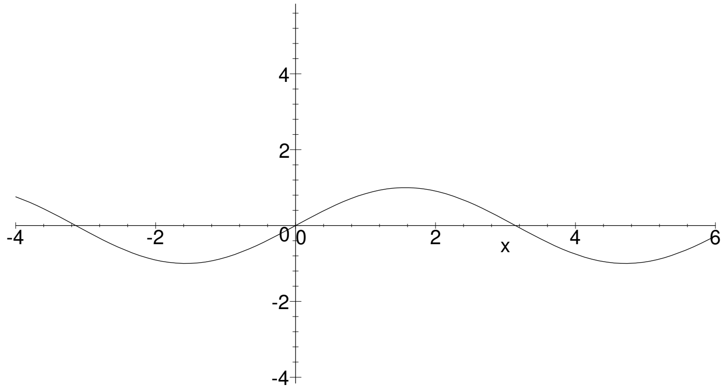


Abb. 33: Graph der Funktion $y = \sin x$

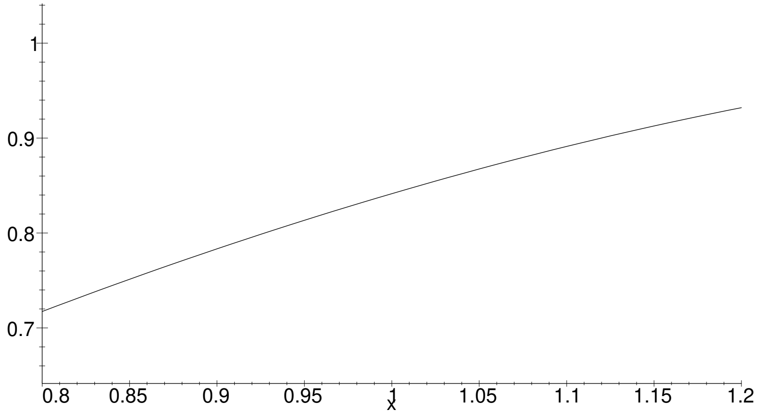


Abb. 34: Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, \sin(1)\big)$

betrachteten Punktes nur wenig von einer Ebenen unterscheidet, d.h. die Funktion ist dort annähernd linear.

Eine lineare Funktion zweier Veränderlicher hat die Form

$$L(x,y) = a + bx + cy;$$

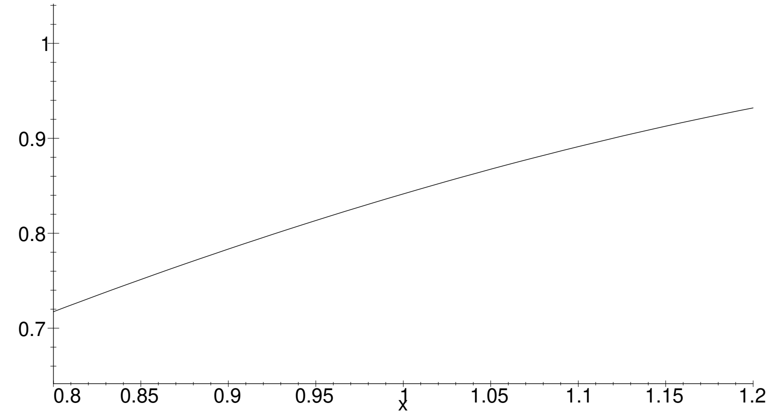


Abb. 35: Nochmalige Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, \sin(1)\big)$

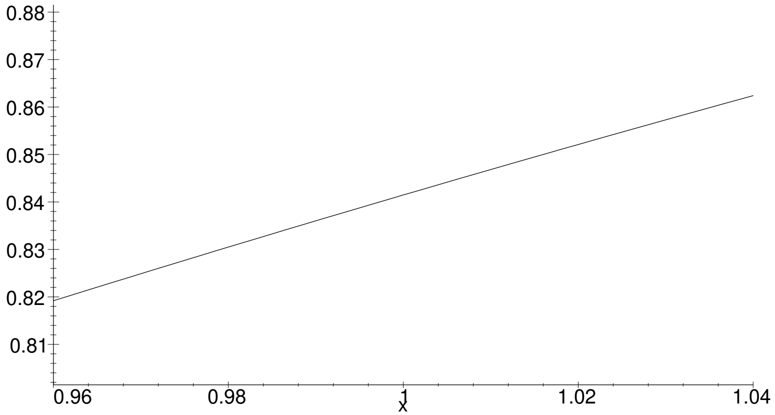


Abb. 36: Nach noch einer Vergrößerung sieht die Funktion praktisch linear aus

also ist

$$L(x+h, y+k) = a + b(x+h) + c(y+k) = (a + bx + cy) + ah + bk$$

eine Approximation für f in der Umgebung des betrachteten Punkts (x, y), hier gleich $(1, 1)$. Im Punkt (x, y) sollte

$$L(x, y) = a + bx + cy$$

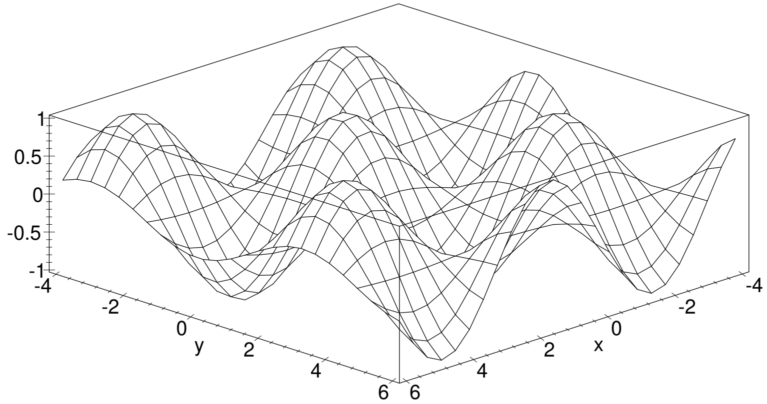


Abb. 37: Graph der Funktion $z = \sin x \cos y$

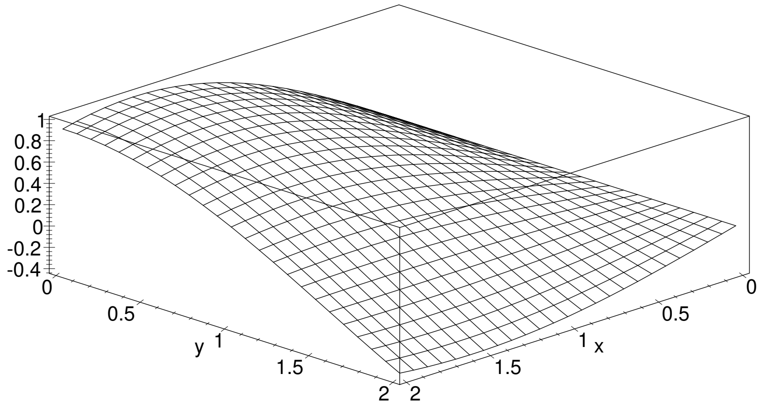


Abb. 38: Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, 1, \sin(1)\cos(1)\big)$

natürlich mit $f(x, y)$ übereinstimmen, und für $(h, k) \neq (0, 0)$ sollte der Unterschied zwischen f und L schneller gegen Null gehen als der Abstand zwischen $(x+h, y+k)$ und (x, y), d.h. schneller als $\sqrt{h^2 + k^2}$. Wir erwarten also, daß

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + ah + bk + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

ist und bekanntlich ist Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ genau so definiert:

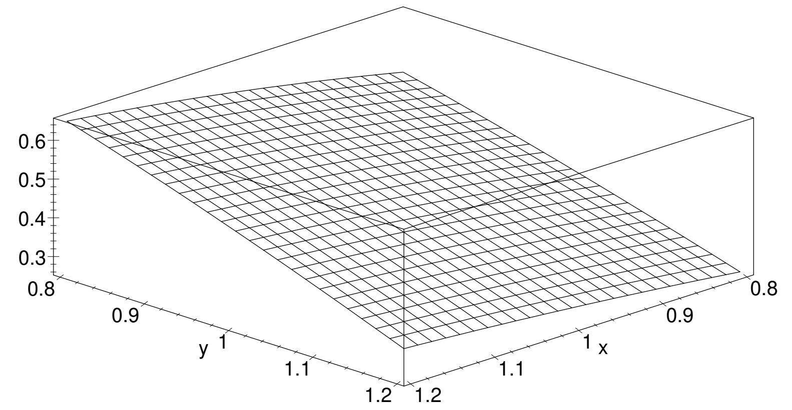


Abb. 39: Nochmalige Vergrößerung um den Faktor fünf um $\big(1, 1, \sin(1)\cos(1)\big)$

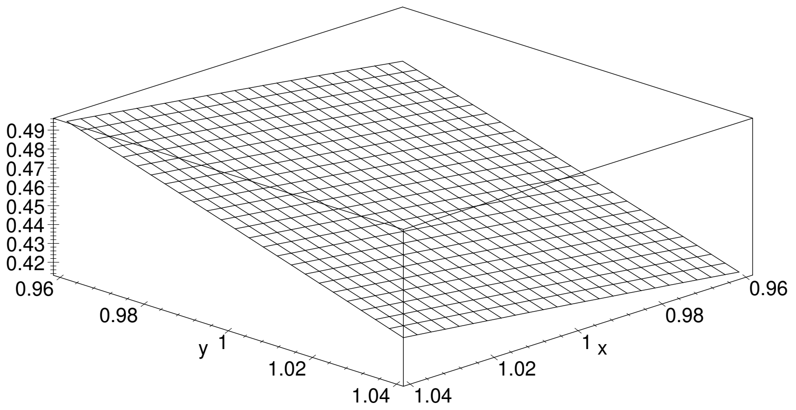


Abb. 40: Nach noch einer Vergrößerung sieht die Funktion praktisch linear aus

Definition: *a)* Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar* im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$, wenn es eine lineare Funktion $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gibt, so daß für $\vec{h} \to 0$ gilt

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + L\big(\vec{h}\big) + o\big(|\vec{h}|\big) .$$

b) Ist für $\vec{h} = {}^t(h_1, \ldots, h_n)$

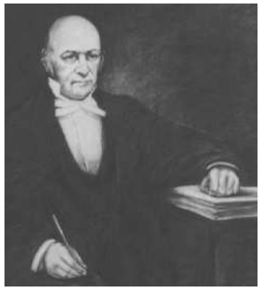
$$L\big(\vec{h}\big) = \gamma_1 h_1 + \cdots + \gamma_n h_n ,$$

so bezeichnen wir den Vektor

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \underset{\text{def}}{=} \nabla f(\boldsymbol{x}) \underset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$

als *Gradient* von f im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$.

Das Symbol ∇ sieht zwar aus wie ein griechischer Buchstabe, ist aber keiner; es ist ein auf den Kopf gestelltes großes Delta (Δ). ∇f wird „Nabla f“ ausgesprochen nach dem griechischen Wort $\nu\alpha\beta\lambda\alpha$ = Leier; die Bezeichnung wurde eingeführt von dem irischen Mathematiker WILLIAM ROWEN HAMILTON, den die Form von ∇ an eine Leier erinnerte.



WILLIAM ROWEN HAMILTON (1805–1865) wurde in Dublin geboren; bereits mit fünf Jahren sprach er Latein, Griechisch und Hebräisch. Mit dreizehn begann er, mathematische Literatur zu lesen, mit 21 wurde er, noch als Student, Professor der Astronomie am Trinity College in Dublin. Er verlor allerdings schon bald sein Interesse für Astronomie und arbeitete weiterhin auf dem Gebiet der Mathematik und Physik. Am bekanntesten ist seine Entdeckung der Quaternionen 1843, vorher publizierte er aber auch bedeutende Arbeiten über Optik, Dynamik und Algebra.

Mit obiger Definition haben wir etwas ähnliches wie die Definition

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

für Funktionen einer Veränderlicher: Auf diese Weise ist die Ableitung zwar *definiert,* aber sie wird – außerhalb von Anfängervorlesungen – praktisch nie so ausgerechnet. Entsprechend sollten wir auch für Funktionen mehrerer Veränderlicher eine effizientere Methode der Differentiation finden.

Am einfachsten wäre es, wenn wir den wohlbekannten Kalkül der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlicher benutzen könnten, also versuchen wir, aus einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Funktionen einer Veränderlichen zu machen. Trotz der schlechten Erfahrungen beim obigen Beispiel einer unstetigen Funktion bietet sich hier an, die Funktion auf eine Gerade einzuschränken.

Eine Gerade durch einen gegebenen Punkt $\boldsymbol{x}$ ist eindeutig festgelegt durch einen Richtungsvektor $\vec{e}$, wobei umgekehrt der Vektor $\vec{e}$ durch die Gerade natürlich *nicht* eindeutig festgelegt ist: Jedes Vielfache von $\vec{e}$ (außer dem Nullvektor) definiert genau dieselbe Gerade.

Wenn wir die Einschränkung von f auf eine solche Gerade mit Richtungsvektor $\vec{e}$ betrachten, betrachten wir konkret die Funktion

$$g(t) = f(\boldsymbol{x} + t\vec{e}) ,$$

die überall dort definiert ist, wo $\boldsymbol{x} + t\vec{e}$ im Definitionsbereich D von f liegt, für eine offene Menge D also zumindest in einem gewissen offenen Intervall um den Nullpunkt der reellen Geraden.

Damit können wir nach der Differenzierbarkeit dieser Funktion für $t = 0$ fragen; falls sie differenzierbar ist, bezeichnen wir die Ableitung

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\vec{e}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

als *Richtungsableitung* von f in Richtung $\vec{e}$. Eine einfache Anwendung der Kettenregel, die jeder Leser am Rand des Skriptums kurz durchführen sollte, zeigt, daß diese „Richtungsableitung“ nicht nur von der *Richtung* des Vektors $\vec{e}$ abhängt, sondern auch von dessen *Länge:* Beispielsweise ist für $h(t) = f(\boldsymbol{x} + 2t\vec{e})$

$$h'(0) = 2g'(0) .$$

Speziell können wir diese Richtungsableitungen betrachten für den Fall, daß $\vec{e}$ ein *Einheitsvektor* ist (genau ist der Grund für die Bezeichnung $\vec{e}$), beispielsweise einer der Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e}_i = {}^t(0, \dots, 1, \dots, 0) ,$$

bei dem in der i-ten Zeile eine Eins steht und sonst lauter Nullen.

Alsdann ist für $g_i(t) = f(\boldsymbol{x} + t\vec{e}_i)$

$$\begin{aligned} g_i'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\vec{e}_i) - f(\boldsymbol{x})}{h} \\ &= \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \end{aligned}$$

die Ableitung jener Funktion, die nur von x_i abhängt, während alle anderen Koordinaten x_j festgehalten werden. Diese Ableitung, so sie existiert, bezeichnen wir als *partielle Ableitung*

$$f_{x_i}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})$$

von f nach x_i; das Symbol ∂ wird, wenn überhaupt, als „del“ ausgesprochen, wobei *del* natürlich eine Abkürzung für *delta* ist. Partielle Ableitungen, so sie existieren, lassen sich nach den üblichen Regeln der Differentialrechnung für Funktionen einer Veränderlichen berechnen, sind also für „gutartige“ Funktionen problemlos.

Falls die Funktion f in $\boldsymbol{x} \in D$ differenzierbar ist und D eine Umgebung von $\vec{x}$ enthält (was für offenes D immer der Fall ist), existiert auch jede Richtungsableitung, denn da dann für jeden Vektor $\vec{h}$ gilt

$$f\big(\boldsymbol{x} + \vec{h}\big) = f(\boldsymbol{x}) + L\big(\vec{h}\big) + o\big(\big|\vec{h}\big|\big) ,$$

ist insbesondere auch

$$f\big(\boldsymbol{x} + t\vec{e}\big) = f(\boldsymbol{x}) + L\big(t\vec{e}\big) + o\big(\big|\vec{h}\big|\big) = f(\boldsymbol{x}) + tL\big(\vec{e}\big) + o(t) ;$$

denn $L\big(\vec{e}\big)$ und $\big|\vec{h}\big|$ sind schließlich Konstanten. Damit existiert

$$\frac{d}{dt} f\big(\boldsymbol{x} + t\vec{e}\big)_{|t=0} = L\big(\vec{e}\big)$$

für jeden Richtungsvektor $\vec{e}$; insbesondere existieren natürlich alle partiellen Ableitungen.

Die Umkehrung gilt leider nicht immer: Bei der (offensichtlich in $(0, 0)$ unstetigen) Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } xy \neq 0 \\ 0 & \text{falls } xy = 0 \end{cases} \end{cases}$$

ist Null auf der x-Achse und der y-Achse, und eins überall sonst. Damit existieren im Punkt $(0,0)$ beide partielle Ableitungen und sind identisch Null. Trotzdem ist f natürlich nicht differenzierbar in $(0,0)$, denn da $f(h,k)$ für jeden Punkt, der nicht auf einer der beiden Koordinatenachsen liegt, gleich eins ist, kann es keine Linearform $L(h,k) = bh + ck$ geben, so daß

$$f(h,k) = f(0,0) + L(h,k) + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right) = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

ist, denn $L(0,0) = 0$ und $f(h,k) = 1$ für $hk \neq 0$.

Nun wird natürlich jeder vernünftige Mensch einwenden, daß dieses Beispiel sehr künstlich ist, und in der Tat verhalten sich „gutartige“ Funktionen nicht so:

Lemma: Falls $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf der offenen Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ stetig ist und auch alle partiellen Ableitungen von f dort existieren und stetig sind, ist f in D differenzierbar und

$$\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) = \nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix} .$$

Beweis: Sei $\boldsymbol{x} \in D$. Da D offen ist, gibt es eine Kugel um $\boldsymbol{x}$, die ganz in D liegt; wir betrachten im folgenden nur Vektoren $\vec{h}$, deren Länge höchstens gleich dem Radius dieser Kugel ist, so daß $\boldsymbol{x} + \vec{h}$ stets in D liegt.

Wir betrachten f zunächst nur als Funktion der ersten Variablen; da deren Ableitung f_{x_1} in ganz D existiert, ist

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n) \\ =&f(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) + f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)h_1 + o(h_1) . \end{aligned}$$

Genauso ist, da die partielle Ableitung nach x_2 in ganz D existiert,

$$\begin{gathered} f(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) = \\ f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n+h_n) + f_{x_2}(x_1,x_2,x_3+h_3\dots,x_n+h_n)h_2 + o(h_2) \end{gathered}$$

und so weiter. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) &+ f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,x_3+h_3,\dots x_n+h_n)h_1 + o(h_1) \\ &+ f_{x_2}(x_1,x_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)h_2 + o(h_2) \\ &\ \ \vdots \\ &+ f_{x_{n-1}}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n+h_n)h_{n-1} + o(h_{n-1}) \\ &+ f_{x_n}(x_1,\dots,x_n)h_n + o(h_n) . \end{aligned}$$

Die LANDAU-Symbole $o(h_1),\dots,o(h_n)$ können wir zu $o\left(\left|\vec{h}\right|\right)$ zusammenfassen, denn da $\left|h_i\right| \le \left|\vec{h}\right|$ für jedes i, kann keines der h_i langsamer gegen Null gehen als $\left|\vec{h}\right|$.

Damit sind wir schon ziemlich nahe an dem, was wir für die Differenzierbarkeit brauchen; allerdings hängen die partiellen Ableitungen noch von den h_i ab, so daß die Differenz zwischen $f(\boldsymbol{x}+\vec{h})$ und $f(\boldsymbol{x})$ nicht durch eine lineare Funktion angenähert ist.

Hier kommt nun die Stetigkeit der partiellen Ableitungen ins Spiel: Diese impliziert, daß

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\left(f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) - f_{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\right) = 0$$

ist. Damit ist

$$\left(f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n) - f_{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)\right)h_1 = o\left(\left|\vec{h}\right|\right) ,$$

denn wenn h_1 mit einem Ausdruck multipliziert wird, der gegen Null geht, strebt das Produkt für $\vec{h} \to 0$ schneller gegen Null als h_1 allein, und $o(h_1)$ kann durch $o\left(\left|\vec{h}\right|\right)$ abgeschätzt werden. Also ist

$$\begin{aligned} &f_{x_1}(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)h_1 \\ =&f_{x_1}(x_1,x_2,\dots,x_n)h_1 + o\left(\left|\vec{h}\right|\right) = f_{x_1}(\boldsymbol{x})h_1 + o\left(\left|\vec{h}\right|\right) . \end{aligned}$$

Entsprechend können wir auch bei den übrigen partiellen Ableitungen argumentieren und erhalten insgesamt, daß

$$f(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + f_{x_1}(\boldsymbol{x})h_1 + \cdots + f_{x_n}(\boldsymbol{x})h_n + o\big(|\vec{h}|\big)$$
$$= f(\boldsymbol{x}) + \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big)$$

ist. Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Für Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen ist der Gradient also gerade der Vektor der partiellen Ableitungen; er kann damit über die bekannten Ableitungsregeln für Funktionen einer Veränderlichen berechnet werden.

NB: Häufig wird der Gradient durch diese Formel *definiert;* in diesem Fall folgt natürlich aus der Existenz des Gradienten nicht die Differenzierbarkeit der Funktion; siehe obiges Beispiel einer unstetigen Funktion, für die alle partiellen Ableitungen in $(0,0)$ existieren.

Nächstes Ziel dieses Paragraphen sind höhere Ableitungen von Funktionen mehrerer Veränderlicher. Wir lassen uns bei der Definition wieder vom eindimensionalen Fall leiten: Für eine zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)\,;$$

mit Hilfe der zweiten Ableitung läßt sich die Funktion also nicht nur linear, sondern auch durch eine quadratische Funktion approximieren; der Approximationsfehler wird dadurch naturgemäß kleiner und geht jetzt für $h \to 0$ sogar schneller gegen Null als h^2.

Im Mehrdimensionalen mußten wir den Term $hf'(x)$ ersetzen durch eine lineare Funktion

$$L(\vec{h}) = \vec{a}\cdot\vec{h} \quad \text{mit} \quad \vec{a} = \operatorname{grad} f\,;$$

entsprechend müssen wir nun den Term $\frac{h^2}{2}f''(x)$ ersetzen durch eine quadratische Funktion

$$\frac{1}{2}Q(\vec{h}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}h_ih_j = \frac{1}{2}{}^t\vec{h}A\vec{h} \quad \text{mit} \quad A = (a_{ij})\,.$$

Die Matrix A können wir dabei als symmetrisch ansetzen, denn da $h_ih_j = h_jh_i$ ist, ändert sich nichts an der Summe, wenn wir a_{ij} und a_{ji} beide durch ihr arithmetisches Mittel ersetzen:

$$a_{ij}h_ih_j + a_{ji}h_jh_i = \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}h_ih_j + \frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}h_jh_i\,.$$

Definition: Die Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt zweifach differenzierbar im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$, wenn es eine Linearform $L(\vec{h}) = \vec{a}\cdot\vec{h}$ und eine quadratische Form $Q(\vec{h}) = {}^t\vec{h}A\vec{h}$ gibt, so daß

$$f(\boldsymbol{x}+\vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + L(\vec{h}) + \frac{1}{2}Q(\vec{h}) + o\big(|\vec{h}|^2\big)$$

ist. Die Matrix A, so sie als symmetrische Matrix gewählt wird, heißt dann HESSE-Matrix von f im Punkt $\boldsymbol{x}$ und wird mit $H_f(\boldsymbol{x})$ bezeichnet.

LUDWIG OTTO HESSE (1811–1874) wurde in Königsberg geboren und unterrichtete zunächst Physik und Chemie am dortigen Gymnasium. 1840 bekam er eine Stelle als Mathematiker an der dortigen Universität, von 1856 bis 1868 war er Professor in Heidelberg, danach in München. Aus der Schule ist er wohl vor allem durch die HESSEsche Normalenform der Ebenengleichung bekannt; der Schwerpunkt seiner Forschungen lag allerdings auf dem Gebiet der Invariantentheorie und der algebraischen Funktionen. Auch die HESSE-Matrix führte er 1842 in einer Arbeit über Invarianten von kubischen und biquadratischen Kurven ein.

Genau wie der Gradient bei gutartigen Funktionen durch die partiellen Ableitungen berechnet werden kann, sollte auch die HESSE-Matrix durch Differentiationsverfahren aus der Analysis einer Veränderlichen berechenbar sein. Das Hilfsmittel dazu sind die zweiten partiellen Ableitungen:

Für eine in ganz D partiell differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ ist auch jede partielle Ableitung f_{x_i} wieder eine Funktion von D nach $\mathbb{R}$, und auch diese kann wieder partiell differenzierbar sein. Falls ja, bezeichnen wir die partielle Ableitung von f_{x_i} nach x_j als zweite partielle Ableitung

$$f_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

von f nach x_i und x_j. Im Fall $i = j$ schreiben wir kurz

$$f_{x_i x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} .$$

Analog lassen sich auch höhere partielle Ableitungen einführen durch die Definition

$$f_{x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \dots \partial x_{i_2} \partial x_{i_1}} \underset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \frac{\partial}{\partial x_{i_{k-1}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} .$$

Als erstes Beispiel können wir etwa die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x,y) = x^4 + 2x^3 y + 3x^2 y^2 + 4xy^3 + 5y^4$$

berechnen: Die partielle Ableitung nach x ist

$$f_x(x,y) = 4x^3 + 6x^2 y + 6xy^2 + 4y^3 ,$$

also ist

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 + 12xy + 6y^2 \quad \text{und}$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2 + 12xy + 12y^2 .$$

Entsprechend ist

$$f_y(x,y) = 2x^3 + 6x^2 y + 12xy^2 + 20y^3 ,$$

also

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2 + 12xy + 12y^2 \quad \text{und}$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x^2 + 24xy + 60y^2 .$$

Insbesondere ist also zumindest in diesem Fall $f_{xy} = f_{yx}$.

Diese Formel gilt, wie wir gleich sehen werden, *fast* immer; zunächst soll aber ein Gegenbeispiel zeigen, daß sie nicht immer gilt: Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{cases} .$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gibt es keinerlei Probleme mit der Differenzierbarkeit, und auch im Nullpunkt existieren alle partiellen Ableitungen, denn da $f(x,0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f(0,y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ verschwindet, ist

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0 .$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ liefern die üblichen Ableitungsregeln, daß

$$f_x(x,y) = y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \quad \text{und}$$

$$f_y(x,y) = x\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

ist. Auch diese Funktionen sind im Nullpunkt nicht definiert; um die zweiten partiellen Ableitungen in $(0,0)$ zu berechnen, müssen wir daher auf die Definition des Differentialquotienten zurückgehen:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1 \quad \text{und}$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{+h^3}{h^3} = +1 ,$$

die beiden gemischten partiellen Ableitungen stimmen also nicht überein.

Das angekündigte positive Resultat stammt von HERMANN AMANDUS SCHWARZ, den wir bereits von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung kennen, und besagt

Lemma: $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf der offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ erklärt und alle zweiten partiellen Ableitungen seien stetig auf D. Dann ist

$$f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) = f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x})$$

für alle $\boldsymbol{x} \in D$ und alle i, j mit $1 \le i, j \le n$.

Beweis: Da bei der partiellen Differentiation alle Variablen außer einer als konstant betrachtet werden, können wir uns auf den Fall $n = 2$ beschränken: Wir interessieren uns nur für die beiden Variablen x_i und x_j, die wir als x und y bezeichnen (wenn sie verschieden sind – andernfalls gibt es aber ohnehin nichts zu beweisen), und betrachten alle sonstigen x_k als konstant.

Für den Punkt (x, y) aus D wählen wir dann $h, k \in \mathbb{R}$ so, daß das Quadrat mit den vier Ecken

$$(x, y),\ (x+h, y),\ (x, y+k) \quad \text{und} \quad (x+h, y+k)$$

vollständig in D liegt; dies ist möglich, da wir D als offene Menge vorausgesetzt haben.

Nach Definition ist

$$f_{xy}(x, y) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x, y)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k)}{h} - \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}}{k} .$$

Falls alle Grenzübergänge miteinander vertauschbar sind (was, wie wir im obigen Gegenbeispiel gesehen haben, keineswegs selbstverständlich ist), ist das ein Limes über den Ausdruck

$$\frac{f(x+h, y+k) - f(x, y+k) - f(x+h, y) + f(x, y)}{hk}$$

für $h, k \to 0$; es liegt also nahe, sich diesen Ausdruck genauer anzuschauen.

Für den Beweis wird es genügen, wenn wir uns auf den Fall $h = k$ beschränken; wir werden den Ausdruck

$$D(h) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h^2}$$

auf zwei Arten ausrechnen:

Zunächst fassen wir, wie oben, die beiden ersten und die beiden letzten Summanden zusammen: Mit der Abkürzung

$$g(y) = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

ist dann

$$D(h) = \frac{g(y+h) - g(y)}{h} .$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist dieser Differenzenquotient gleich dem Differentialquotient $g'(\eta)$ für eine (von h abhängige) Zahl η zwischen y und $y + h$. Somit ist

$$D(h) = g'(\eta) = \frac{f_y(x+h, \eta) - f_y(x, \eta)}{h} = f_{yx}(\xi, \eta)$$

für ein η zwischen x und $x + h$, denn natürlich können wir auch auf diesen Differenzenquotienten den Mittelwertsatz anwenden.

Für die zweite Berechnung fassen wir in $D(h)$ den ersten und den dritten sowie den zweiten und den vierten Term zusammen. Mit der Abkürzung

$$\widetilde{g}(x) = \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

ist dann dieses Mal

$$D(h) = \frac{\widetilde{g}(x+h) - \widetilde{g}(y)}{h} ,$$

und nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es dazu ein $\widetilde{\xi}$ zwischen x und $x + h$, so daß dies gleich $\widetilde{g}'(\widetilde{\xi})$ ist. Also ist

$$D(h) = \widetilde{g}'(\widetilde{\xi}) = \frac{f_x(\widetilde{\xi}, y+h) - f_x(\widetilde{\xi}, y)}{h} = f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

für eine Zahl $\widetilde{\eta}$ zwischen y und $y + h$. Somit haben wir gezeigt, daß

$$D(h) = f_{yx}(\xi, \eta) = f_{xy}(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$$

ist.

Lassen wir nun h gegen Null gehen, konvergieren ξ und $\widetilde{\xi}$ gegen x und η wie auch $\widetilde{\eta}$ gegen y. Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen konvergiert daher $f_{yx}(\xi,\eta)$ gegen $f_{yx}(x,y)$ und $f_{xy}(\widetilde{\xi},\widetilde{\eta})$ gegen $f_{xy}(x,y)$, d.h. der Grenzwert existiert und

$$D(0) = f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Ein analoger Satz gilt natürlich auch für höhere partielle Ableitungen; für k-fache Ableitungen müssen wir entsprechend voraussetzen, daß die k-fachen partiellen Ableitungen existieren und stetig sind.

Definition: Für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichne $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, deren sämtliche partielle Ableitungen bis zu den k-ten existieren und stetig sind. Für $k = 0$ sei $\mathcal{C}^0(D,\mathbb{R})$ einfach die Menge aller stetiger Funktionen $D \to \mathbb{R}$.

Man überlegt sich sofort, daß $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, und es ist auch nicht schwer einzusehen, daß die Funktionen aus $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ alle die Eigenschaften haben, die man bei der Betrachtung von k-ten Ableitungen wünscht:

Erstens ist die Berechnung einer k-ten partiellen Ableitung von der Reihenfolge der partiellen Differentiationen unabhängig: Wie wir aus Kapitel 4, §2*c)* wissen, kann jede Permutation als Produkt von Transpositionen geschrieben werden; es genügt also zu zeigen, daß man die Reihenfolge zweiter partieller Differentiationen vertauschen kann, und die können auch noch als benachbart angenommen werden, denn eine beliebige Transposition läßt sich immer als Produkt von Transpositionen benachbarter Elemente schreiben. Für eine solche Transposition ist

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\cdots\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\,.$$

Für $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ ist sichergestellt, daß

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})\,;$$

nach obigem Lemma ist daher

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{i_{r+1}}}\frac{\partial}{\partial x_{i_r}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{r+2}}}\cdots\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}}\right)\,.$$

Differenziert man hier beide Seiten noch partiell nach x_1 bis x_{r-1}, ändert dies natürlich nichts an der Gleichheit.

Zweitens besagt das vorletzte Lemma, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D,\mathbb{R})$ differenzierbar ist. Eine naheliegende Verallgemeinerung des dortigen Beweises, bei der man anstelle von linearen Approximationen solche höherer Ordnung betrachtet, zeigt, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^2(D,\mathbb{R})$ zweifach differenzierbar ist, und daß entsprechend eine Funktion f aus $\mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ bis auf einen Fehler der Größenordnung $o\big(|\vec{h}|^k\big)$ durch ein Polynom k-ten Grades approximiert werden kann. (Wie das im einzelnen aussieht, wollen wir uns lieber nicht so genau anschauen: Eine Form vom Grad k ist gegeben durch eine k-fache Summation von 1 bis n, hat also n^k Summanden, was recht schnell unübersichtlich wird.)

Die Aussage, daß eine Funktion $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ bis auf Fehler der Größenordnung $o\big(|\vec{h}|^k\big)$ durch ein Polynom approximiert werden kann, ist natürlich das mehrdimensionale Analogon der TAYLOR-Entwicklung im Eindimensionalen; wir können TAYLOR-Polynome einigermaßen übersichtlich hinschreiben, wenn wir Richtungsableitungen benutzen: Die Richtungsableitung von f in Richtung $\vec{v}$ ist nach Definition die Ableitung der Funktion einer Veränderlichen

$$g\colon \begin{cases} (-a,a) & \to \mathbb{R} \\ t & \mapsto f(\boldsymbol{x} + t\vec{v}) \end{cases}$$

mit geeignet gewähltem $a \in \mathbb{R}_+$ nach t für $t = 0$; wir können sie berechnen als Skalarprodukt des Gradienten mit dem Vektor $\vec{v}$.

Natürlich können wir g nicht nur einmal ableiten; für $f \in \mathcal{C}^k(D,\mathbb{R})$ existiert das TAYLOR-Polynom k-ten Grades

$$g(h) = g(0) + h\cdot g'(0) + \frac{h^2}{2}g''(0) + \cdots + \frac{h^k}{k!}g^{(k)}(0) + o(h^k)\,.$$

Führen wir nun für die Richtungsableitung in Richtung $\vec{v}$ einen Operator $\partial_{\vec{v}}$ ein durch

$$\partial_{\vec{v}} f(x) = \operatorname{grad} f(x) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \cdot v_i ,$$

so wird dies zu

$$f(\boldsymbol{x} + h\vec{v}) = f(\boldsymbol{x}) + h\partial_{\vec{v}} f(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{h^k}{k!}\partial_{\vec{v}}^k f(\boldsymbol{x}) + o(h^k) .$$

Speziell für $h = 1$ erhalten wir die kompakte Schreibweise der TAYLOR-Formel, nämlich

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{v}) = f(\boldsymbol{x}) + \partial_{\vec{v}} f(\boldsymbol{x}) + \cdots + \frac{1}{k!}\partial_{\vec{v}}^k f(\boldsymbol{x}) + o\big(|\vec{v}|^k\big) .$$

$\partial_{\vec{v}}^k$ steht hierbei natürlich für die k-fache Anwendung des Operators $\partial_{\vec{v}}$; was das explizit bedeutet, sollte man sich anhand obiger Summendarstellung von $\partial_{\vec{v}}$ klarmachen. Insbesondere beachte man, daß alle Potenzprodukte der v_i in den Potenzen des Operatiors $\partial_{\vec{v}}$ stecken und daß diese nach Ausmultiplizieren schnell ziemlich unübersichtlich werden.

Zumindest für $n = 2$ ist alles aber noch einigermaßen handhabbar; hier sehen wir sofort, daß für $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ gilt

$$H_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} ,$$

und nach dem Lemma von SCHWARZ ist dies eine symmetrische Matrix.

Als letztes Thema in diesem Paragraphen wollen wir uns ein weiteres klassisches Thema der Analysis einer Veränderlichen im Mehrdimensionalen ansehen: die Bestimmung von Extremwerten.

Aus der Definition der Differenzierbarkeit folgt unmittelbar

Lemma: Wenn die differenzierbare Funktion $f \in \mathcal{C}^1(D, \mathbb{R})$ im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ ein lokales Extremum hat, ist dort ihr Gradient gleich dem Nullvektor.

Beweis: Nach Definition der Differenzierbarkeit ist

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + o\big(|\vec{h}|\big) .$$

Wäre $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x})$ ungleich dem Nullvektor, so gäbe es Vektoren $\vec{h}$, für die $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} > 0$ wäre, zum Beispiel alle positiven Vielfachen des Gradienten, und es gäbe Vektoren $\vec{h}$, für die $\operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} < 0$ wäre, zum Beispiel alle negativen Vielfachen des Gradienten. Damit könnte $f(\boldsymbol{x})$ weder Maximum noch Minimum sein, da für kleine Vektoren $\vec{h}$ der lineare Term das Restglied $o\big(|\vec{h}|\big)$ dominiert.

■

Die Frage, welche Nullstellen des Gradienten wirklich Extremwerten entsprechen, ist – wie auch schon im Eindimensionalen – schwieriger; in der Praxis wird es meist am einfachsten sein, sich die Umgebung des betreffenden Punktes mit irgendwelchen *ad hoc*-Methoden genauer anzusehen und dann zu entscheiden.

Falls man formal vorgehen möchte, kann man wie im Eindimensionalen ein noch einigermaßen überschaubares *hinreichendes* Kriterium angeben mit den aus **[HM I]**, §7*f3*bekannten Definitheitsbegriff für Matrizen:

Lemma: Falls für $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ der Gradient im Punkt $\boldsymbol{x} \in D$ verschwindet, gilt:
a) Falls die HESSE-Matrix $H_f(\boldsymbol{x})$ positiv definit ist, hat f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ein Minimum.
b) Falls $H_f(\boldsymbol{x})$ negativ definit ist, hat f im Punkt $\boldsymbol{x}$ ein Maximum.
c) Falls $H_f(\boldsymbol{x})$ indefinit ist, hat f im Punkt $\boldsymbol{x}$ kein Extremum.

Beweis: Für $f \in \mathcal{C}^2(D, \mathbb{R})$ ist

$$f(\boldsymbol{x} + \vec{h}) = f(\boldsymbol{x}) + \operatorname{grad} f(\boldsymbol{x}) \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2}{}^t\vec{h} H_f(\vec{x})\vec{h} + o\big(|\vec{h}^2|\big) .$$

Falls der Gradient verschwindet, wird das Verhalten von f in der Umgebung von $\boldsymbol{x}$ also von der quadratischen Form ${}^t\vec{h} H_f(\vec{x})\vec{h}$ bestimmt. Im positiv definiten Fall nimmt diese in einer gewissen Umgebung von $\boldsymbol{x}$