Die LAPLACE-Transformierte

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{s}{1+s^2}$$

des Cosinus wird bei dieser Vorgehensweise gleich mitgeliefert.

Genauso können wir $\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$ ausrechnen: Hier ist

$$\omega \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

und

$$\omega \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - s \cdot \mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s)\,,$$

also

$$\omega \mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1 - \frac{s^2}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s)$$

oder

$$\left(\omega + \frac{s^2}{\omega}\right)\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = 1\,,$$

d.h.

$$\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{1}{\omega + \frac{s^2}{\omega}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{s}{\omega}\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Für die reine Schwingung $f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ ist also

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = a\mathcal{L}\{\sin \omega t\}(s) + b\mathcal{L}\{\cos \omega t\}(s) = \frac{as+b\omega}{s^2+\omega^2}\,.$$

Auch gedämpfte Schwingungen sind kein Problem, denn für jede Funktion f ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)e^{-\lambda t}\}(s) &= \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\lambda)t}\,dt\\ &= \mathcal{L}\{f(t)\}(s+\lambda)\,,\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\sin \omega t\}(s) = \frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$$

und

$$\mathcal{L}\{e^{-\lambda t}\cos \omega t\}(s) = \frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}\,.$$

Betrachten wir als nächstes Polynome: Für eine reine Potenz ist

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt\,.$$

Dieses Integral erinnert an die aus der Analysis I bekannte Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

(**[Ba]**, *Kapitel 4, (3.9)*), und in der Tat wird mit der Substitution $u = st$

$$\int_0^\infty t^n e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{u^n}{s^n}e^{-u}\frac{du}{s} = \frac{1}{s^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}\,.$$

Nach **[Ba]**, *Kapitel 4, (3.11)* ist $\Gamma(n+1) = n!$, also

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}\,.$$

Für ein Polynom

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

ist damit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \frac{n!a_n}{s^{n+1}} + \frac{(n-1)!a_{n-1}}{s^n} + \cdots + \frac{2a_1}{s^2} + \frac{a_0}{s}\\ &= \frac{n!a_n + (n-1)!a_{n-1}s + \cdots + 2a_1 s^{n-1} + a_0 s^n}{s^{n+1}}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist die LAPLACE-Transformierte einer konstanten Funktion $f(t) = a$ gleich a/s. Genau dieselbe Transformierte hat natürlich auch die Sprungfunktion

$$f(t) = \begin{cases} a & \text{für } t \ge 0\\ 0 & \text{für } t < 0\end{cases}\,,$$

denn auf Werte an negativen Stellen kommt es bei der LAPLACE-Transformation nicht an.

c) Erste Anwendungen auf Differentialgleichungen

Nachdem wir so die LAPLACE-Transformation für einige wichtige Funktionen kennen, können wir darangehen, erste Differentialgleichungen zu lösen. Wir beginnen mit der extrem einfachen Gleichung für eine Masse an einer Feder, die sich reibungsfrei in x-Richtung bewegen kann:

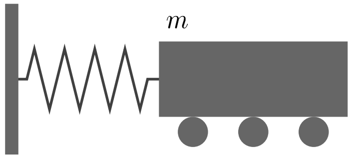

Abb. 4: Eine schwingende Masse

Nach dem HOOKEschen Gesetz wirkt auf diese Masse eine Rückstellkraft $\lambda x(t)$, die proportional zur Auslenkung $x(t)$ aus der Ruhelage ist; nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz ist diese Kraft (eine zeitlich konstante Masse m vorausgesetzt) gleich $m\ddot{x}(t)$. Insgesamt ist also

$$m\ddot{x}(t) + \lambda x(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}x(t) = 0\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus

$$s^2\mathcal{L}\{x(t)\}(s) - s\cdot x(0) - \dot{x}(0) + \frac{\lambda}{m}\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = 0$$

oder

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{s\cdot x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + \frac{\lambda}{m}}\,.$$

Die schwingende Masse m soll natürlich positiv sein, und auch λ ist größer als null, da $\lambda x(t)$ die *Rückstellkraft* ist. Also ist

$$\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = \frac{x(0)\cdot s}{s^2+\omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{s^2+\omega^2} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\,.$$

Hier erkennen wir die gerade berechneten LAPLACE-Transformierten

$$\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

und folgern, daß $x(t)$, falls LAPLACE-transformierbar, die Form

$$x(t) = x(0)\cos\omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega}\sin\omega t$$

haben muß mit $\omega = \sqrt{\lambda/m}$. Die Masse schwingt also ungedämpft mit Frequenz $\sqrt{\lambda/m}$.

Eine solche ungedämpfte Schwingung wird man in der Realität eher selten beobachten; in den meisten Fällen führen Reibungseffekte schließlich zum Abklingen der Schwingung. Die Reibungskraft wird im allgemeinen als proportional zur Geschwindigkeit angesetzt, d.h. die linke Seite der Differentialgleichung wird durch ein konstantes Vielfaches von $\dot{x}(t)$ ergänzt. Dieselbe Art von Differentialgleichung erhalten wir auch, wenn wir eine Spule, einen Kondensator und einen Widerstand wie in Abbildung 5 hintereinanderschalten:

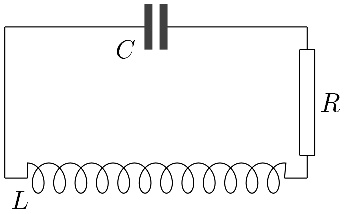

Abb. 5: Ein elektrischer Schwingkreis

Damit hier ein Strom fließt, nehmen wir an, daß der Kondensator zur Zeitpunkt $t = 0$ eine Ladung Q_0 enthalte; die Ladung zum Zeitpunkt t sei $Q(t)$. Dann beträgt der Spannungsabfall am Kondensator

$$U_1(t) = \frac{Q(t)}{C}\,,$$

der an der Spule ist nach der LENZschen Regel gleich

$$U_2(t) = L\dot{I}(t) = L\ddot{Q}(t)\,,$$

wobei $I(t) = \dot{Q}(t)$ die Stromstärke bezeichnet, und am Widerstand haben wir natürlich nach dem OHMschen Gesetz

$$U_3(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)\,.$$

Diese drei Spannungen müssen sich zu Null addieren, d.h.

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{Q}(t) + \frac{R}{L}\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{LC} = 0\,.$$

Um bei der Lösung dieser Gleichung keine komplizierten Konstanten mitschleppen zu müssen, schreiben wir die Gleichung bis auf weiteres in der Form

$$\ddot{Q}(t) + \rho\dot{Q}(t) + \sigma Q(t) = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{R}{L} \text{ und } \sigma = \frac{1}{LC}\,.$$

Außerdem schreiben wir $y(t)$ anstelle von $Q(t)$, um es einerseits mit gewohnten Variablen zu tun zu haben und andererseits, weil wir diesen Typ von Gleichungen noch auf viele andere Probleme anwenden können, bei denen die gesuchte Funktion nicht als Ladung interpretiert werden kann. Wir interessieren uns für das Anfangswertproblem

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = y_0 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = y_1\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation ergibt

$$s^2\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 + \rho\big(s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\big) + \sigma\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = 0$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Eine LAPLACE-Transformierte dieser Form haben wir bislang noch nicht gesehen; wir kennen nur Nenner der Form $(s+\lambda)^2+\omega^2$. In diese Richtung führt uns einer der ältesten Tricks der Mathematik, die über 2000 Jahre alte quadratische Ergänzung:

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s + \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}\,.$$

Falls $\sigma > \rho^2/4$ können wir

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2} + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2 + \omega^2}\,.$$

Diese beiden Summanden erkennen wir als (bis auf konstante Faktoren) die LAPLACE-Transformierten von $e^{-\rho t/2}\cos\omega t$ und $e^{-\rho t/2}\sin\omega t$, d.h.

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-\rho t/2}\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}e^{-\rho t/2}\sin\omega t \\ &= e^{-\rho t/2}\left(y_0\cos\omega t + \frac{y_1 + y_0\rho/2}{\omega}\sin\omega t\right)\,. \end{aligned}$$

Der Kondensator entlädt sich also, wie es physikalisch zu erwarten war, aber der zeitliche Verlauf ist gegeben durch eine gedämpfte Schwingung. Die Dämpfung wird mit wachsendem $\rho = R/L$ immer stärker wird, d.h. je größer der Widerstand und je kleiner die Induktivität ist, desto größer ist die Dämpfung. Abbildung 6 zeigt ein Beispiel einer gedämpften Schwingung zusammen mit der Amplitudenfunktion $e^{-\rho t}$.

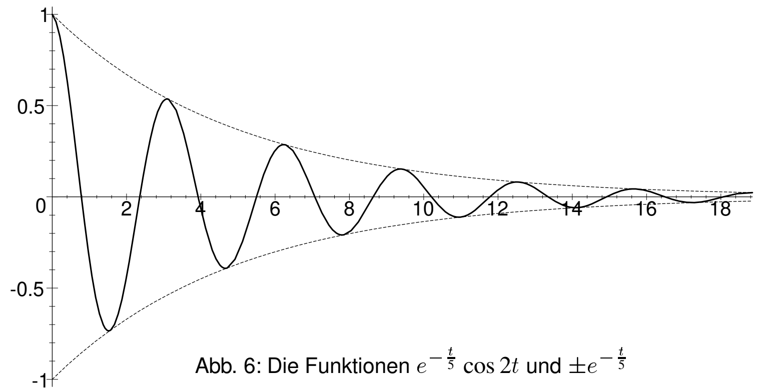

Abb. 6: Die Funktionen $e^{-\frac{t}{5}}\cos 2t$ und $\pm e^{-\frac{t}{5}}$

Falls σ kleiner ist als $\rho^2/4$, können wir

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4} - \sigma}$$

setzen und haben dann

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{(s+\rho/2)^2 - \omega^2}\,.$$

Diesen Ausdruck kennen wir so noch nicht als LAPLACE-Transformierte einer Funktion, aber wir wissen, daß allgemein $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

ist und können hoffentlich auch noch genug Bruchrechnung, um die Beziehung

$$\frac{1}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{1}{(s+\rho/2)+\omega} = \frac{2\omega}{(s+\rho/2)^2-\omega^2}$$

nachzurechnen. Damit ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0+y_1+\rho y_0}{(s+\rho/2)^2-\omega^2}\\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{sy_0+y_1+\rho y_0}{(s+\rho/2)-\omega} - \frac{sy_0+y_1+\rho y_0}{(s+\rho/2)+\omega}\right)\\
&= \frac{1}{2\omega}\left(\frac{y_0(s+\rho/2-\omega)+y_0\rho/2+y_1+y_0\omega}{s+\rho/2-\omega}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{y_0(s+\rho/2+\omega)+y_0\rho/2+y_1-y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right)\\
&= \frac{1}{2\omega}\left(y_0+\frac{y_0\rho/2+y_1+y_0\omega}{s+\rho/2-\omega} - y_0 - \frac{y_0\rho/2+y_1-y_0\omega}{s+\rho/2+\omega}\right)\\
&= \frac{y_0\rho/2+y_1+y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2-\omega}\\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2+y_1-y_0\omega}{2\omega}\cdot\frac{1}{s+\rho/2+\omega}\,.
\end{aligned}$$

Diese Summanden können wir als LAPLACE-Transformierte identifizieren: Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Konstanten Eins ist, ist $1/(s+a)$ die von e^{-as}; wir haben hier also

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{y_0\rho/2+y_1+y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2-\omega)t}\}(s)\\
&\qquad - \frac{y_0\rho/2+y_1-y_0\omega}{2\omega}\cdot\mathcal{L}\{e^{-(\rho/2+\omega)t}\}(s)
\end{aligned}$$

und somit

$$y(t) = \frac{y_0\rho/2+y_1+y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2-\omega)t} - \frac{y_0\rho/2+y_1-y_0\omega}{2\omega}\cdot e^{-(\rho/2+\omega)t}\,.$$

Wegen der Positivität von σ ist

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho^2}{4}-\sigma} < \sqrt{\frac{\rho^2}{4}} = \frac{\rho}{2}\,;$$

daher sind dies zwei Eyponentialfunktionen, die für $t\to\infty$ gegen null gehen, der Kondensator entlädt sich in diesem Fall also ohne Schwingungen gemäß einer Summe zweier Eyponentialfunktionen. Die Bedingung $\sigma < \frac{\rho^2}{4}$ übersetzt sich in diesem Fall in

$$\frac{1}{LC} < \frac{R^2}{L^2} \quad\text{oder}\quad R > \sqrt{\frac{L}{C}}\,,$$

wenn der Widerstand zu groß ist, dämpft er also so stark, daß es keine Schwingungskomponente mehr gibt.

Bleibt noch der Fall, daß $\sigma = \rho^2/4$ ist. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{y(t)\}(s) &= \frac{sy_0+y_1+\rho y_0}{(s+\rho/2)^2} = \frac{y_0(s+\rho/2)}{(s+\rho/2)^2} + \frac{y_1+y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\\
&= \frac{y_0}{s+\rho/2} + \frac{y_1+y_0\rho/2}{(s+\rho/2)^2}\,.
\end{aligned}$$

Da $1/s$ die LAPLACE-Transformierte der Eins ist und $1/s^2$ die der Identität, ist somit

$$y(t) = \left(y_0 + \left(y_1 + y_0\frac{\rho}{2}\right)t\right)\,e^{\frac{-\rho}{2}t}$$

Produkt einer linearen Funktion und einer abfallenden Eyponentialfunktion. Abbildung 7 zeigt zwei solche Funktionen, eine mit ansteigendem und eine mit abfallendem linearen Faktor.

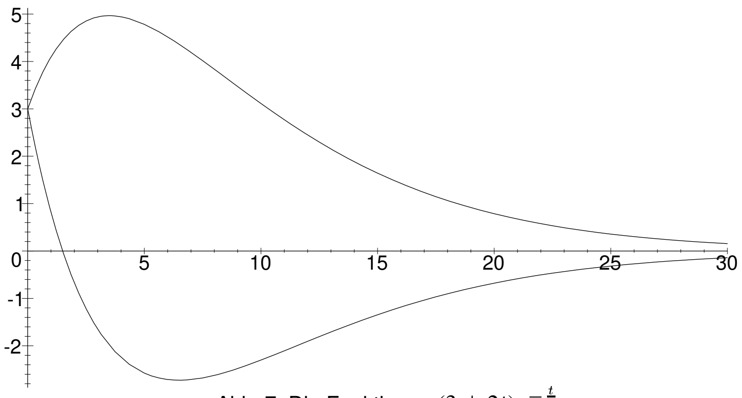

Abb. 7: Die Funktionen $(3\pm 2t)e^{-\frac{t}{5}}$

Im obigen Stromkreis floß nur deshalb ein Strom, weil der Kondensator aus irgendeinem Grund bereits aufgeladen war; üblicher wäre, daß ein Strom fließt, weil der Stromkreis eine Stromquelle enthält. Wir ergänzen deshalb den Stromkreis aus Abbildung 5 durch eine Wechselstromquelle mit Frequenz ω_0; der Einfachheit halber wählen wir die Phase so, daß dieser Wechselstrom durch eine reine Cosinusfunktion der Form $A_0 \cos \omega_0 t$ beschrieben werden kann mit $A_0, \omega_0 > 0$. Die Differentialgleichung wird dann zu

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{Q(t)}{C} = A_0 \cos \omega_0 t\,,$$

was wir wieder kurz schreiben als

$$\ddot{y}(t) + \rho\dot{y}(t) + \sigma y(t) = c \cos \omega_0 t$$

mit

$$y(t) = Q(t), \quad \rho = \frac{R}{L}, \quad \sigma = \frac{1}{LC} \quad \text{und} \quad c = \frac{A_0}{L}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation führt auf

$$(s^2 + \rho s + \sigma)\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - sy_0 - y_1 - \rho y_0 = \frac{cs}{s^2 + \omega_0^2}$$

und damit

$$\mathcal{L}\{y(t)\}(s) = \frac{sy_0 + y_1 + \rho y_0}{s^2 + \rho s + \sigma} + \frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)}\,.$$

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation des ersten Summanden kennen wir: Das ist die Lösung der gerade betrachteten Differentialgleichung. Mit dem zweiten Summanden könnten wir umgehen, wenn nur einer der beiden Faktoren im Nenner stünde; dann hätten wir im wesentlichen die LAPLACE-Transformierte einer Cosinusfunktion.

Genau das gleiche Problem hätten wir, wenn wir eine Stammfunktion des zweiten Summanden suchen würden, und in dieser Situation wüßten wir auch, wie wir weiter vorgehen müßten: Durch Partialbruchzerlegung (**[Ba]**, *§4.2, Satz 1.19 und Umgebung*) könnten wir den Integranden in einfachere Brüche zerlegen, deren Stammfunktionen wir kennen. Dieser Ansatz der Partialbruchzerlegung führt auch bei der LAPLACE-Transformation oft zum Erfolg: Falls die beiden Faktoren

des Nenners verschieden sind, können wir mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ schreiben

$$\frac{cs}{(s^2 + \omega_0^2)(s^2 + \rho s + \sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2 + \rho s + \sigma}\,.$$

Falls beide Nenner gleich sind, d.h. wenn

$$\rho = 0 \quad \text{und} \quad \sigma = \omega_0^2$$

ist, funktioniert dies natürlich nicht; diesen Fall werden wir vorläufig zurückstellen. Multiplikation des obigigen Ansatzes mit dem Hauptnenner führt auf die Polynomgleichung

$$\begin{aligned} cs &= (\alpha s + \beta)(s^2 + \rho s + \sigma) + (\gamma s + \delta)(s^2 + \omega_0^2) \\ &= (\alpha + \gamma)s^3 + (\beta + \alpha\rho + \delta)s^2 + (\beta\rho + \alpha\sigma + \gamma\omega_0^2)s + \beta\sigma + \delta\omega_0^2\,. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß rechts alle Koeffizienten außer dem von s verschwinden müssen. Beim ersten Koeffizienten bedeutet dies, daß

$$\gamma = -\alpha$$

sein muß, und beim letzen erhalten wir

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta\,.$$

Damit bleiben nur noch zwei Gleichungen für α und β übrig:

$$\rho\alpha + \left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha + \rho\beta = c\,.$$

Falls ρ nicht verschwindet, führt die erste Gleichung zu

$$\alpha = \frac{\frac{\sigma}{\omega_0^2} - 1}{\rho} \cdot \beta = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta\,,$$

und damit ist nach der zweiten Gleichung

$$\left(\frac{(\sigma - \omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho\right)\beta = c$$

oder

$$\beta = \frac{c}{\frac{(\sigma-\omega_0^2)^2}{\rho\omega_0^2} + \rho} = \frac{c\rho\omega_0^2}{(\sigma-\omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \,.$$

Damit sind auch α, γ und δ bekannt:

$$\alpha = -\gamma = \frac{\sigma - \omega_0^2}{\rho\omega_0^2} \cdot \beta = \frac{c(\sigma - \omega_0^2)}{(\sigma-\omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2}$$

und

$$\delta = -\frac{\sigma}{\omega_0^2}\beta = \frac{-c\rho\sigma}{(\sigma-\omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2} \,.$$

Bleibt noch der Fall $\rho = 0$ zu behandeln. Dann bleibt vom Gleichungssystem für α und β nur noch

$$\left(1 - \frac{\sigma}{\omega_0^2}\right)\beta = 0 \quad \text{und} \quad (\sigma - \omega_0^2)\alpha = c$$

übrig. Ist $\sigma \neq \omega_0^2$, folgt, daß

$$\beta = \delta = 0 \quad \text{und} \quad \alpha = -\gamma = \frac{c}{\sigma - \omega_0^2}$$

sein muß, was offensichtlich genau die obigen Formeln im Spezialfall $\rho = 0$ sind. Für $\sigma = \omega_0^2$ sind wir in dem Fall, den wir zurückgestellt haben, und sehen noch einmal, daß hier der obige Ansatz nicht zu Ziel führt, da die zweite Gleichung zu $0 \cdot \beta = c \neq 0$ wird. In allen anderen Fällen kennen wir nun reelle Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)(s^2+\rho s+\sigma)} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2+\omega_0^2} + \frac{\gamma s + \delta}{s^2+\rho s+\sigma}$$

ist. Vom ersten Summanden wissen wir, daß

$$\mathcal{L}\left\{\alpha\cos\omega_0 t + \frac{\beta}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right\} = \frac{\alpha s + \beta}{s^2+\omega_0^2}$$

ist; den zweiten Summanden müssen wir wie oben durch quadratische Ergänzung

$$s^2 + \rho s + \sigma = \left(s - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

umformen, und genau wie dort hängt es vom Vorzeichen von

$$\sigma - \frac{\rho^2}{4}$$

ab, ob wir gedämpfte Schwingungen mit Frequenz

$$\omega = \sqrt{\sigma - \frac{\rho^2}{4}}$$

oder abfallende Eyponentialfunktionen erhalten. In jedem Fall ist die Lösung Linearkombination einer reinen Schwingung mit der erregenden Frequenz ω_0, im elektrischen Schwingkreis also der Frequenz der Wechselstromquelle, und einer Funktion, die für $t \to \infty$ gegen null geht. Langfristig setzt sich also, wie auch Abbildung 8 zeigt, die erregende Frequenz durch.

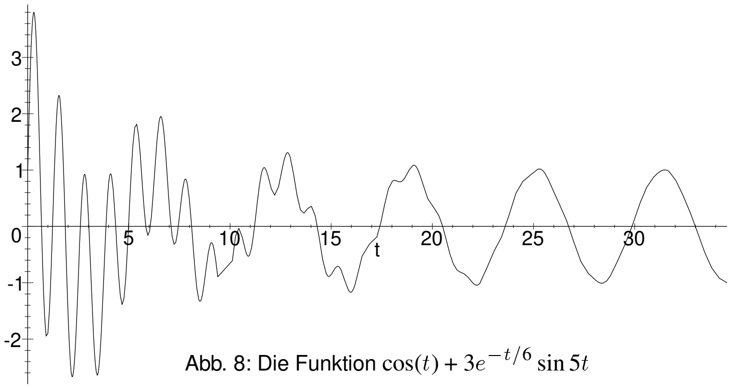

Abb. 8: Die Funktion $\cos(t) + 3e^{-t/6}\sin 5t$

Bleibt noch der zurückgestellte Fall, daß $\rho = 0$ und $\sigma = \omega_0^2$ ist. Dann müssen wir eine Funktion finden, der LAPLACE-Transformierte gleich

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2}$$

ist. Diese Funktion sieht so ähnlich aus wie die Ableitung von $1/(s^2+\omega_0^2)$; in der Tat ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \frac{d}{ds}\frac{-c/2}{s^2+\omega_0^2} \,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, ist die LAPLACE-Transformierte von

$$f(t) = -\frac{c}{2\omega_0} \sin \omega_0 t \,,$$

und nach Aussage *b)* des Lemmas aus §*1b* ist (sofern das Integral absolut konvergiert) allgemein

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt = \int_0^\infty \frac{d}{ds} f(t)e^{-st}\,dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)\cdot(-t)\cdot e^{-st}\,dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}(s)\,.$$

Also ist

$$\frac{cs}{(s^2+\omega_0^2)^2} = \mathcal{L}\left\{\frac{c}{2\omega_0}\cdot t\sin\omega_0 t\right\}(s)\,,$$

und wir haben auch diesen Fall gelöst. Die Funktion $t \sin \omega_0 t$ ist in Abbildung 9 zu sehen; ihre Amplitude steigt immer weiter an.

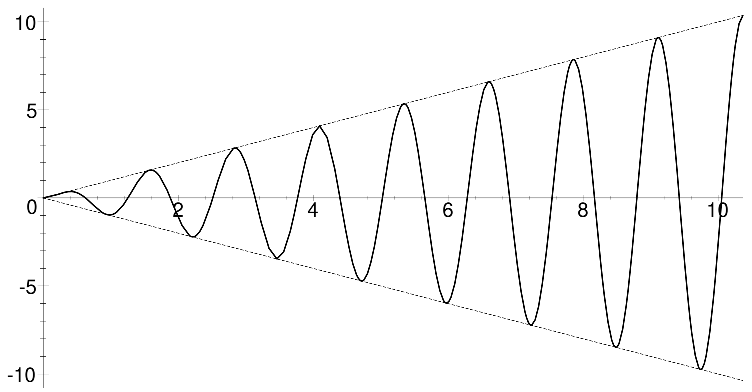

Abb. 9: Die Funktionen $t \sin 5t$

Da unbegrenzt ansteigende Funktionen in Anwendungen selten etwas gutes bedeuten, spricht man hier von einer *Resonanzkatastrophe:* Die erregende Schwingung hat dieselbe Frequenz wie der Schwingkreis,

und das führt, bei Abwesenheit einer jeglichen Dämpfung, zu einer katastrophalen Aufschaukelung. Auch bei Dämpfung ist Resonanz zu beobachten: Die oben berechneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, haben allesamt den Nenner

$$(\sigma - \omega_0^2)^2 + \rho^2\omega_0^2\,,$$

werden also umso größer, je näher σ bei ω_0^2 liegt, jedoch verhindert der Dämpfungsterm ρ, daß der Nenner wirklich je verschwindet. Bei kleinem ρ kann die Resonanz bei und um $\sigma = \omega_0^2$ allerdings in der Prayis trotzdem problematisch und in Eytremfällen sogar katastrophal sein.

Mit den Formeln, die schon haben, könnten wir nun leicht die vollständigen Lösungen für jeden der behandelten Fälle hinschreiben, aber die bisherige Diskussion zeigt, daß das doch zu sehr langen Formeln führen würde.Die LAPLACE-Transformation ist zwar sehr gut geeignet, um die Lösung eines *konkreten* Anfangswertproblems hinzuschreiben – dann sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ keine komplizierten Ausdrücke, sondern einfach reelle Zahlen –, aber für abstraktere Überlegungen führt sie zu eher unübersichtlichen Ergebnissen.

Leider hat man es auch bei konkreten Anwendungen nicht immer mit konkreten Anfangswertproblemen zu tun: Beim Entwurf von Systemen beispielsweise geht es im allgemeinen eher darum, die Anfangswerte so festzulegen, daß die Lösungen

Da es oft auch wichtig ist, eine Übersicht über *alle* Lösungen einer Differentialgleichung zu haben, um dann beispielsweise bei Steuerungsproblemen die Anfangsbedingungen so zu wählen, daß die Lösung ein gewünschte Verhalten zeigt, sollten wir noch weitere Methoden zum Umgang mit Differentialgleichungen kennenlernen.

d) Systeme linearer Differentialgleichungen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, daß Differentialgleichungen höherer Ordnung interessante Anwendungen haben; wir wissen aber bereits, daß man solche Gleichungen stets umschreiben kann in Systeme, die nur erste Ableitungen enthalten, und zumindest in den gerade betrachteten Beispielen hatten die neu eingeführten Funktionen auch eine physikalische Interpretation als Geschwindigkeit *bzw.* Stromstärke. Die Auffassung als System hat außerdem den Vorteil, daß wir den Apparat der linearen Algebra anwenden können, der uns eine strukturelle Übersicht über die Lösungsmenge einer Differentialgleichung gibt – zumindest im linearen Fall.

Wir betrachten in diesem Abschnitt Systeme von Differentialgleichungen, wie sie zu Beginn dieses Paragraphen definiert wurden, unter der (sehr) einschränkenden Voraussetzungen, daß die rechten Seiten linear in den gesuchten Funktionen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ sind; wir betrachten also das System

$$\begin{aligned}
\dot y_1(t) &= a_{11}(t)y_1(t) + a_{12}(t)y_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)y_n(t) + b_1(t)\\
\dot y_2(t) &= a_{21}(t)y_1(t) + a_{22}(t)y_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)y_n(t) + b_2(t)\\
\vdots\ & \quad \vdots\\
\dot y_n(t) &= a_{n1}(t)y_1(t) + a_{n2}(t)y_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)y_n(t) + b_n(t)
\end{aligned} \tag{$*$}$$

Eventuell haben wir noch Anfangsbedingungen der Form

$$y_1(t_0) = c_0, \quad y_2(t_0) = c_2, \quad \ldots, \quad y_n(t_0) = c_n \tag{$**$}$$

für ein festes $t_0 \in \mathbb{R}$.

Für das Beispiel des elektrischen Schwingkreises mit angelegter Wechselspannung etwa haben wir bei dieser Sicht der Dinge die beiden Funktionen $Q(t)$, die Ladung des Kondensators zum Zeitpunkt t, und $I(t) = \dot Q(t)$, die resultierende Stromstärke; das Differentialgleichungssystem $(*)$ wird zu

$$\begin{aligned}
\dot Q(t) &= I(t)\\
\dot I(t) &= -\frac{R}{L}I(t) - \frac{Q(t)}{LC} + A_0 \cos\omega_0 t
\end{aligned} .$$

Wir können die Funktionen $y_i(t), b_i(t)$ und die Anfangswerte c_i jeweils zu Vektoren zusammenfassen und die Koeffizientenfunktionen $a_{ij}(t)$ zu

einer Matrix; mit

$$\vec y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t)\\ y_2(t)\\ \vdots\\ y_n(t)\end{pmatrix}, \qquad \vec b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t)\\ b_2(t)\\ \vdots\\ b_n(t)\end{pmatrix}, \qquad \vec c = \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$$

und

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \ldots & a_{1n}(t)\\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \ldots & a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \ldots & a_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

bekommt das System die übersichtlichere Form

$$\dot{\vec y}(t) = A(t)\cdot \vec y(t) + \vec b(t)\,,$$

wobei die Ableitung eines Vektors von Funktionen natürlich der Vektor der abgeleiteten Funktionen sein soll. Falls es Anfangsbedingungen gibt, haben sie nun die kompakte Form $\vec y(t_0) = \vec c$.

In Analogie zu den linearen Gleichungssystemen bezeichnen wir das System $(*)$ als *homogen,* wenn $\vec b(t)$ der Nullvektor ist, wenn also alle Funktionen $b_i(t)$ verschwinden; andernfalls bezeichnen wir es als *inhomogen.* Das homogene System zu einem gegebenen inhomogenen System soll einfach dasjenige System sein, in dem alle $b_i(t)$ durch null ersetzt wurden.

Wie bei linearen Gleichungssystemen gilt auch hier

Lemma: *a)* Die Menge aller Lösungen eines *homogenen* Differentialgleichungssystems der Form $(*)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.
b) Ist das System nicht homogen und ist $\vec y(t)$ eine feste Lösung, so läßt sich jede andere Lösung $\vec z(t)$ schreiben als $\vec z(t) = \vec y(t) + \vec x(t)$ mit einer Lösung $\vec x(t)$ des zugehörigen homogenen Systems; die Lösungsmenge ist also ein affiner Raum.

Beweis: a) Wir müssen zeigen, daß für zwei Lösungen $\dot{\vec x}(t)$ und $\dot{\vec y}(t)$ eines homogenen Systems auch jede Linearkombination $\lambda\vec x(t) + \mu\vec y(t)$ mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wieder eine Lösung ist. Das ist aber klar, denn wenn

$$\dot{\vec x}(t) = A(t)\cdot\vec x(t) \quad\text{und}\quad \dot{\vec y}(t) = A(t)\cdot\vec y(t)$$

ist, gilt auch

$$\frac{d}{dt}\big(\lambda\vec{x}(t)+\mu\vec{y}(t)\big)=\lambda\dot{\vec{x}}(t)+\mu\dot{\vec{y}}(t)=\lambda A(t)\cdot\vec{x}(t)+\mu A(t)\cdot\vec{y}(t)$$
$$=A(t)\cdot\big(\lambda\vec{x}(t)+\mu\vec{y}(t)\big)\,.$$

b) Sind $\vec{y}(t)$ und $\vec{z}(t)$ zwei Lösungen von $(*)$, so ist

$$\dot{\vec{y}}(t)=A(t)\cdot\vec{y}(t)+\vec{b}(t)\quad\text{und}\quad\dot{\vec{z}}(t)=A(t)\cdot\vec{z}(t)+\vec{b}(t)\,;$$

die Differenz $x(t)=z(t)-y(t)$ hat somit die Ableitung

$$\dot{\vec{x}}(t)=\dot{\vec{z}}(t)-\dot{\vec{y}}(t)=\Big(A(t)\cdot\vec{z}(t)+\vec{b}(t)\Big)-\Big(A(t)\cdot\vec{z}(t)+\vec{b}(t)\Big)$$
$$=A(t)\cdot\vec{z}(t)-A(t)\cdot y(t)=A(t)\cdot\Big(\vec{z}(t)-\vec{y}(t)\Big)=A(t)\cdot\vec{x}(t)$$

und $x(t)$ löst also in der Tat das zugehörige homogene System. ■

Um die Lösungsmenge des Differentialgleichungssystems $(*)$ zu verstehen, müssen wir nach diesem Lemma zwei Teilaufgaben lösen:

1.) Wir müssen den Vektorraum der Lösungen des homogenen Systems bestimmen.
2.) Wir müssen uns wenigstens eine Lösung des inhomogenen Systems verschaffen – oder zumindest wissen, daß eine existiert.

Um im einfachsten Fall zu sehen, wie so etwas funktionieren könnte, betrachten wir ein „System" aus genau einer Gleichung

$$\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)+b(t)\,;$$

dabei nehmen wir an, daß y eine differenzierbare Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ sei und $a,b\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ stetige Funktionen.

Wir beginnen mit der Lösung des homogenen Systems

$$\dot{y}(t)=a(t)\cdot y(t)\,.$$

Unter der Annahme, daß wir das dürfen, dividieren wir durch $y(t)$ und erhalten

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}=a(t)\,.$$

Der Quotient links ist bekanntlich die logarithmische Ableitung von $y(t)$; falls dies nicht mehr bekannt sein sollte, zeigt eine einfache Anwendung der Kettenregel, daß in einem Intervall, in dem $y(t)$ positiv ist,

$$\frac{d}{dt}\ln y(t)=\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}=a(t)$$

ist. In einem Intervall, in dem $y(t)$ negativ ist, gilt entsprechend

$$\frac{d}{dt}\ln\big(-y(t)\big)=\frac{-\dot{y}(t)}{-y(t)}=\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}=a(t)\,,$$

und allgemein haben wir somit

$$\frac{d}{dt}\ln|y(t)|=\frac{\dot{y}(t)}{y(t)}=a(t)$$

in jedem Intervall, in dem $y(t)$ nirgends verschwindet.

Integration beider Seiten führt auf

$$\ln|y(t)|=\int a(t)\,dt+C\quad\text{oder}\quad y(t)=e^{\int a(t)\,dt+C}=e^C\cdot e^{\int a(t)\,dt}$$

oder

$$y(t)=\pm e^C\cdot e^{\int a(t)\,dt}\,,$$

wobei das Vorzeichen wegen der Stetigkeit von y im gesamten Intervall konstant ist, da die Exponentialfunktion nie null wird.

Damit ist in diesem Fall das erste Problem auf eine einfache Integration zurückgeführt.

Bleibt noch die Frage, was passiert, wenn $y(t)$ an irgendeinem Punkt t_0 eine Nullstelle haben sollte. Wir wollen uns überlegen, daß $y(t)$ dann auch für jedes $t>t_0$ verschwinden muß. Falls nicht, gibt es einen Punkt $t_1>t_0$, so daß $y(t_1)\neq 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von $y(t)$ ist die Funktion dann auch in einer Umgebung von t_1 von Null verschieden, d.h. dort können wir die obigen Argumente anwenden und sehen, daß $y(t)$ dort die Form $e^{h(t)}$ hat mit irgendeiner Funktion h. Da y als differenzierbare Funktion insbesondere überall stetig sein muß und $e^{h(t)}$ nirgends verschwindet, ist das nicht möglich. Genauso überlegt man sich, daß $y(t)$ für jedes $t<t_0$ verschwinden muß, $y(t)$ ist also gleich der Nullfunktion.

Diese ist somit die einzige Lösung, die noch zusätzlich betrachtet werden muß. Insbesondere folgt daraus auch, daß eine Lösungsfunktion, die in irgendeinem Punkt positiv *bzw.* negativ ist, überall positiv *bzw.* negativ sein muß, denn eine stetige Funktion kann ihr Vorzeichen nur wechseln, wenn sie in irgendeinem Punkt null wird; wie wir gerade gesehen haben, ist das genau dann der Fall, wenn sie überall verschwindet.

Somit hat jede Lösung die Form

$$y(t) = ae^{\int a(t)\,dt} \quad \text{mit einem } a \in \mathbb{R}\,.$$

Insbesondere bilden diese Lösungen einen eindimensionalen Vektorraum.

Auch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung läßt sich in diesem Fall angeben: Die Methode der *Variation der Konstanten,* mit der wir uns später noch genauer beschäftigen werden, führt auf den Kandidaten

$$y(t) = \left(\int b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right)\cdot e^{\int a(t)\,dt}\,,$$

und in der Tat rechnet man leicht nach, daß nach der Produktregel

$$\begin{aligned}\dot y(t) &= \left(b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\right)\cdot e^{\int a(t)\,dt}\\ &\qquad + \left(\int b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right)\cdot\left(a(t)\cdot e^{\int a(t)\,dt}\right)\\ &= b(t) + a(t)\cdot\left(\int b(t)\cdot e^{-\int a(t)\,dt}\,dt\right)\cdot e^{\int a(t)\,dt}\\ &= a(t)\cdot y(t) + b(t)\end{aligned}$$

ist.

Es wäre schön, wenn wir im mehrdimensionalen Fall genauso vorgehen könnten. Zumindest für homogene Systeme bietet sich an, formal genauso vorzugehen wie im eindimensionalen: Dort hatten wir

$$\dot y(t) = a(t)\cdot y(t) \Longrightarrow y(t) = ce^{\int a(t)\,dt} \quad \text{mit} \quad c\in\mathbb{R}\,.$$

Warum sollte also nicht gelten

$$\dot{\vec y}(t) = A(t)\cdot\vec y(t) \Longrightarrow y(t) = e^{\int A(t)\,dt}\cdot\vec c \quad \text{mit} \quad \vec c\in\mathbb{R}^n \ ?$$

Das Problem dabei ist nur, daß wir nicht die geringste Ahnung haben, was die rechte Seite hier bedeuten soll; unser nächstes Ziel ist es, ihr eine Bedeutung zu geben.

e) Die Matrixexponentialfunktion

Wir orientieren uns wieder am Eindimensionalen: Für eine reelle Zahl x ist

$$e^x = \sum_{i=0}^\infty \frac{x^i}{i!}\,,$$

also setzen wir analog für eine $n\times n$-Matrix X

$$e^X \underset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{i!}\cdot X^i\,.$$

Damit ist klar, daß e^X eine $n\times n$-Matrix sein soll, und das erklärt auch, warum oben der Konstantenvektor $\vec y_0$ auf der rechten Seite steht. Was wir uns noch überlegen müssen, ist die Konvergenz der Reihe.

Dazu müssen wir die Größe der Einträge in den Matrizen X^i abschätzen: Sind allgemein A, B zwei $n\times n$-Matrizen und sind die Beträge aller Einträge von A kleiner oder gleich a und die von B kleiner oder gleich b, so kann es in AB offensichtlich keinen Eintrag geben, dessen Betrag größer ist als nab: Schließlich ist jeder Eintrag in der Produktmatrix eine Summe von n Summanden, deren jeder Produkt je eines Eintrags von A und von B ist.

Um diese Formel leichter anwenden zu können, machen wir sie mutwillig schlechter und begnügen uns damit, daß jeder Eintrag von AB höchstens den Betrag $(na)\cdot(nb)$ hat.

Ist nun x der Betrag des größten Eintrags in der Matrix X, so folgt induktiv sofort, daß in X^i höchstens Zahlen bis zum Betrag $(nx)^i$ stehen können; in der endlichen Teilsumme

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{1}{i!} X^i$$

hat daher jeder Eintrag einen Betrag kleiner

$$\sum_{i=0}^{M} \frac{(nx)^i}{i!} .$$

Letztere Summe konvergiert für $M \to \infty$ gegen e^{nx}, und damit muß auch die Matrixsumme konvergieren, denn die Reihe für e^{nx} ist konvergente Majorante des Betrags eines jeden Eintrags. Insbesondere hat jeder Eintrag von e^X höchstens den Betrag e^{nx}.

Damit wissen wir also, daß die Matrix e^X für jede $n \times n$-Matrix X existiert; somit ist die Funktion $t \mapsto e^{At}$ wohldefiniert.

Wir können natürlich nicht erwarten, daß die Matrixexponentialfunktion alle schönen Eigenschaften der gewöhnlichen Exponentialfunktion erbt. Beispielsweise ist nur schwer vorstellbar, daß für beliebige Matrizen A und B gelten sollte $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$: Da für zwei Matrizen A und B stets $A + B = B + A$ ist, müßte dann auch $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ sein, was zumindest unwahrscheinlich aussieht. In der Tat ist etwa für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sowohl A^2 als auch B^2 gleich der Nullmatrix, d.h.

$$e^A = E + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad e^B = E + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$e^A \cdot e^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Das Quadrat von $C = A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist aber gleich der Einheits-

matrix und daher ist

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= E + C + \frac{1}{2!}E + \frac{1}{3!}C + \frac{1}{4!}E + \frac{1}{5!}C + \cdots \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i)!} \right) \cdot E + \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(2i+1)!} \right) \cdot C \\ &= \cosh(1) \cdot E + \sinh(1) \cdot C = \begin{pmatrix} \cosh(1) & \sinh(1) \\ \sinh(1) & \cosh(1) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e + e^{-1} & e - e^{-1} \\ e - e^{-1} & e + e^{-1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Zum Glück gilt aber wenigstens

Lemma: Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $AB = BA$ ist

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Insbesondere ist für $s, t \in \mathbb{R}$

$$e^{A(s+t)} = e^{As} \cdot e^{At} .$$

Beweis: Für zwei reelle Zahlen x, y ist $e^{x+y} = e^x e^y = e^y e^x$; damit gilt dieselbe Formel auch für zwei reellwertige Variablen x und y. Wenn wir in allen Potenzreihen alle x- und y-Potenzen oberhalb der N-ten ignorieren, sagt die Gleichung aus, daß drei Polynome in x und y *als Polynome* identisch sind.

Beim Rechnen mit Polynomen in x und y verwendet man keine speziellen Eigenschaften dieser Variablen *außer, daß sie kommutieren.* Damit kann man in so eine Polynomidentität auch kommutierende Matrizen A und B einsetzen: Beispielsweise führt die Polynomidentität

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

zur Identität

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 ,$$

die wegen der für beliebige Matrizen gültigen Gleichung

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

für kommutierende Matrizen in der Tat erfüllt ist.

Damit ist für kommutierende Matrizen A, B speziell stets

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A .$$

Da zwei skalare Vielfache derselben Matrix stets miteinander kommutieren, folgt damit auch die letzte Aussage des Lemmas. ∎

Die für uns wichtigste Anwendung hiervon ist

Satz: Für jede $n \times n$-Matrix A ist die Funktion

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n} \\ t \mapsto e^{At} \end{cases}$$

stetig differenzierbar mit Ableitung $t \mapsto A \cdot e^{At} = e^{At} \cdot A$.

Beweis: Die Ableitung ist definiert als

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} .$$

Da die Matrizen At und Ah miteinander vertauschbar sind, ist nach dem gerade bewiesenen Lemma $e^{A(t+h)} = e^{At} \cdot e^{Ah}$, also

$$\frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot \frac{e^{Ah} - E}{h} .$$

Dabei ist

$$\frac{e^{Ah} - E}{h} = \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{i!} = A + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+1)!} .$$

Nach der obigen Diskussion ist jeder Eintrag der Matrix in der rechtsstehenden Summenmatrix höchstens gleich

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(ah)^i}{(i+1)!} = \frac{e^{ah} - 1}{h} ,$$

und der rechtsstehende Ausdruck geht für $h \to 0$ selbst gegen Null; wer das nicht gleich sieht, frage DE L'HOSPITAL oder TAYLOR. Damit ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(Ah)^i}{(i+1)!}$$

gleich der Nullmatrix und somit

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = e^{At} \cdot A .$$

Dies ist auch gleich $A \cdot e^{At}$, denn da A mit jeder seiner Potenzen vertauschbar ist, ist es auch mit jeder endlichen Teilsumme der Reihe von e^{At} vertauschbar, also auch mit e^{At} selbst. ∎

Am Ende des vorigen Abschnitts hatten wir gehofft, daß vielleicht auch für jede matrixwertige Funktion $A(t)$ gelten könnte, daß

$$\frac{d}{dt} e^{A(t)} = \dot{A}(t) e^{A(t)}$$

ist; dies war offensichtlich zu optimistisch: Da

$$e^{A(t+h)} = e^{A(t) + h\dot{A}(t) + o(h)}$$

ist, bräuchten wir für einen Beweis nach obigem Vorbild, daß $A(t)$ und $\dot{A}(t)$ miteinander kommutieren; dies ist aber im allgemeinen nicht der Fall. Für

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

beispielsweise ist

$$\dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

also

$$A(t) \cdot \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \text{aber} \quad \dot{A}(t) \cdot A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist natürlich kein Beweis dafür, daß die Ableitung von $e^{A(t)}$ ungleich $\dot{A}(t) \cdot e^{A(t)}$ ist, aber im vorliegenden Fall ist die Ableitung in der Tat verschieden sowohl von $\dot{A}(t)e^{A(t)}$ als auch von $e^{A(t)} \cdot A(t)$: Mit den Methoden, die wir im nächsten Abschnitt kennenlernen werden, können wir durch eine (alles andere als angenehme) Rechnung zeigen, daß

$$e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{1+\sqrt{t}} + e^{1-\sqrt{t}}}{2} & \dfrac{\sqrt{t}\left(e^{1+\sqrt{t}} - e^{1-\sqrt{t}}\right)}{2} \\ \dfrac{e^{1+\sqrt{t}} - e^{1-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} & \dfrac{e^{1+\sqrt{t}} + e^{1-\sqrt{t}}}{2} \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{d}{dt}e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \frac{\left(e^{2\sqrt{t}}-1\right)\, e^{1-\sqrt{t}}}{4\sqrt{t}} & \frac{\left(-1+\sqrt{t}+\sqrt{t}e^{2\sqrt{t}}+e^{2\sqrt{t}}\right)\, e^{1-\sqrt{t}}}{4\sqrt{t}} \\ \frac{\left(1-e^{2\sqrt{t}}+\sqrt{t}+\sqrt{t}e^{2\sqrt{t}}\right)\, e^{1-\sqrt{t}}}{4t\sqrt{t}} & \frac{\left(e^{2\sqrt{t}}-1\right)\, e^{1-\sqrt{t}}}{4\sqrt{t}} \end{pmatrix},$$

aber

$$\dot{A}(t)\cdot e^{A(t)} = \begin{pmatrix} \frac{e^{1+\sqrt{t}} - e^{1-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} & \frac{e^{1+\sqrt{t}} + e^{1-\sqrt{t}}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$e^{A(t)}\cdot \dot{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e^{1+\sqrt{t}} + e^{1-\sqrt{t}}}{2} \\ 0 & \frac{e^{1+\sqrt{t}} - e^{1-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$$

ist. Wir müssen uns bei diesem Ansatz also begnügen mit linearen homogenen Differentialgleichungen mit *konstanten* Koeffizienten.

Alles was uns zu deren theoretischer Lösung jetzt noch fehlt sind Rechenregeln für den Umgang mit Ableitungen von Matrixfunktionen; für die praktische Lösung fehlen natürlich auch noch Verfahren zur effizienten Berechnung der Matrixexponentialfunktion.

Zumindest für Summen und Produkte gelten, wenn man von der Nichtkommutativität der Multiplikation absieht, die üblichen Regeln:

Lemma: $F, G\colon (a,b) \to \mathbb{R}^{n\times n}$ seien zwei matrixwertige Funktionen auf dem offenen Intervall (a,b). Dann ist

$$\frac{d}{dt}\big(F(t)+G(t)\big) = \dot{F}(t)+\dot{G}(t)$$

und

$$\frac{d}{dt}\big((F(t)G(t)\big) = \dot{F}(t)\cdot G(t) + F(t)\cdot \dot{G}(t)\,.$$

Für einen konstanten Vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ ist

$$\frac{d}{dt}\big(F(t)\cdot\vec{v}\big) = \dot{F}(t)\cdot\vec{v}\,.$$

Beweis: Für die Summe ist dies klar: Sind $f_{ij}(t)$ und $g_{ij}(t)$ die Komponenten der Matrizen F und G, so sind die Summen $f_{ij}(t)+g_{ij}(t)$ die Komponenten von $F+G$, und deren Ableitung ist die Summe der Ableitungen.

Die (i,j)-Komponenten von FG ist die Funktion $\sum_{\nu=1}^{n} f_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t)$, und deren Ableitung ist

$$\sum_{\nu=1}^{n}\Big(\dot{f}_{i\nu}(t)\cdot g_{\nu j}(t) + f_{i\nu}(t)\cdot \dot{g}_{\nu j}(t)\Big)\,,$$

die (i,j)-Komponente von $\dot{F}(t)\cdot G(t)+F(t)\cdot\dot{G}(t)$.

Sind $v_1,\dots,v_n$ die Komponenten des Vektors $\vec{v}$, so ist die i-te Komponente der vektorwertigen Funktion $F(t)\cdot\vec{v}$ gleich der Summe

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\cdot v_j \quad \text{mit Ableitung} \quad \sum_{j=1}^{n}\dot{f}_{ij}(t)\cdot v_j\,,$$

und das ist die i-te Komponente von $\dot{F}(t)\cdot\vec{v}$.

■

Damit haben wir alles zusammen und können zeigen

Satz: Die sämtlichen Lösungen der Differentialgleichung $\dot{y} = Ay$ sind genau die Funktionen $t\mapsto e^{At}\vec{y}_0$ mit $\vec{y}_0\in\mathbb{R}^n$.

Beweis: Da e^{At} die Ableitung Ae^{At} hat, ist die Ableitung der vektorwertigen Funktion $\vec{f}(t) = e^{At}\cdot\vec{y}_0$ nach der zuletzt bewiesenen Formel gleich $A\cdot e^{At}\cdot\vec{y}_0$, also in der Tat gleich $A\cdot\vec{f}(t)$.

Nun sei $\vec{y}\colon (a,b)\to\mathbb{R}^n$ irgendeine differenzierbare vektorwertige Funktion mit der Eigenschaft, daß $\dot{\vec{y}}(t) = A\cdot\vec{y}(t)$ ist. Wir betrachten die Funktion $\vec{g}(t) = e^{-At}\cdot\vec{y}(t)$. Deren Ableitung ist

$$\dot{\vec{g}}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot\vec{y}(t)+e^{-At}\cdot\dot{\vec{y}}(t) = -A\cdot e^{-At}\cdot\vec{y}(t)+e^{-At}\cdot A\vec{y}(t) = \vec{0}\,,$$

denn die Matrix A ist mit e^{-At} vertauschbar. Damit haben alle Komponenten von $\vec{g}$ die Ableitung Null, sind also konstant, und somit ist $\vec{g}(t) \underset{\text{def}}{=} \vec{y}_0$ ein konstanter Vektor mit der Eigenschaft, daß

$$\vec{y}_0 = e^{-At}\cdot\vec{y}(t), \quad \textit{d.h.} \quad \vec{y}(t) = e^{At}\cdot\vec{y}_0\,,$$

wie behauptet. ■

Korollar: Für jeden Vektor $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ und jede reelle Zahl $t_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine differenzierbare Funktion $\vec{y}(t)$ mit den Eigenschaften, daß $\dot{\vec{y}}(t) = A\vec{y}(t)$ und $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$ ist; dies ist $\vec{y}(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot \vec{y}_0$. ■

Wir wußten bereits, daß die Lösungen einen Vektorraum bilden; obiges Korollar sagt uns, daß dieser Vektorraum die Dimension n hat und daß für jede reelle Zahl t_0 die Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{y}(t_0)$ ein Isomorphismus auf den $\mathbb{R}^n$ ist.

f) Berechnung der Matrixexponentialfunktion

Die Matrixexponentialfunktion ist zwar wohldefiniert, aber eine matrixwertige Potenzreihe ist für allgemeine Matrizen A nicht gerade einfach zu berechnen. Wir brauchen daher alternative Rechenverfahren.

Zumindest ein Fall ist problemlos: Ist nämlich

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, ist offensichtlich

$$e^{Dt} = \begin{pmatrix} e^{d_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{d_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{d_n t} \end{pmatrix}$$

wieder eine Diagonalmatrix, wobei die Exponentialfunktion einfach komponentenweise auf die Diagonaleinträge ihres Arguments angewandt wird.

Diagonalmatrizen treten leider eher selten auf; wir können eine gegebene Matrix aber, wenn wir sie bezüglich der richtigen Basis betrachten, erheblich vereinfachen: Falls beispielsweise die algebraische Vielfachheit eines jeden Eigenwerts gleich seiner geometrischen Vielfachheit

ist, hat der $\mathbb{R}^n$ eine Basis aus Eigenvektoren der Matrix, und bezüglich dieser Basis hat die Matrix Diagonalgestalt. Ist B die Matrix des Basiswechsels, ist also $D = B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix. Nach dem Distributivgesetz ist

$$B^{-1}(A_1 + A_2)B = B^{-1}A_1B + B^{-1}A_2B\,,$$

und entsprechendes gilt natürlich für jede endliche Summe von Matrizen. Außerdem ist

$$B^{-1}(A_1 \cdot A_2)B = B^{-1}A_1B \cdot B^{-1}A_2B$$

und

$$B^{-1}A_1^mB = (B^{-1}A_1B)^m\,,$$

also im Limes auch

$$B^{-1}e^AB = e^{B^{-1}AB} \quad \text{und} \quad e^A = Be^{B^{-1}AB}B^{-1}\,.$$

Zumindest für eine diagonalisierbare Matrix ist also die Exponentialfunktion nicht schwieriger als die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren und die Transformation der Matrix in ihre Diagonalgestalt.

Insbesondere gibt es also keine großen Probleme mit Matrizen, die lauter verschiedene Eigenwerte haben; dann sind die Lösungen des Differentialgleichungssystems allesamt Linearkombinationen der Funktionen $e^{\lambda_i t}$, wobei λ_i die Eigenwerte der Matrix sind.

Woran das liegt, sieht man am besten, wenn man das ursprüngliche Differentialgleichungssystem transformiert auf das Koordinatensystem des $\mathbb{R}^n$, das der Basis aus Eigenvektoren entspricht: Die entsprechenden Linearkombinationen z_j der y_i erfüllen dann Differentialgleichungen der Form

$$\dot{z}_j = \lambda_j z_j\,,$$

wobei λ_j der zu z_j gehörende Eigenwert von A ist. Damit ist natürlich $z_j = a_j e^{\lambda_j t}$, und die y_i lassen sich durch Rücktransformation zur Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ als Linearkombinationen der z_j berechnen.

Falls auch Eigenwerte auftreten, deren geometrische Vielfachheit kleiner ist als die algebraische, können wir nicht so argumentieren; dann können