Wolfgang K. Seiler

Höhere Mathematik II

Vorlesung an der Universität Mannheim
im Wintersemester 1999/2000

Dieses Skriptum entsteht parallel zur Vorlesung und soll mit möglichst geringer Verzögerung verteilt werden. Es ist in seiner Qualität auf keinen Fall mit einem Lehrbuch zu vergleichen; insbesondere sind Fehler bei dieser Entstehensweise nicht nur möglich, sondern **sicher**. Dabei handelt es sich sicherlich nicht immer nur um harmlose Tippfehler, sondern auch um Fehler bei den mathematischen Aussagen.

Das Skriptum sollte daher mit Sorgfalt und einem gewissen Mißtrauen gegen seinen Inhalt gelesen werden; falls Sie Fehler finden, teilen Sie mir dies bitte persönlich oder per e-mail (seiler@math.uni-mannheim.de) mit. Auch wenn Sie Teile des Skriptums unverständlich finden, bin ich für entsprechende Hinweise dankbar.

Falls genügend viele Hinweise eingehen, werde ich von Zeit zu Zeit Berichtigungen und Verbesserungen ausgeben.

Literaturhinweise

Hier ändert sich wenig gegenüber der HM I; nur bei den mehrbändigen Werken werden wir nun gelegentlich einen anderen Band benötigen.

Da die Vorlesung auf der HM I und der Analysis I aufbaut, wird es nützlich sein, gelegentlich au deren Skripten zu konsultieren, also

[Ba] H.-J. BARTELS: *Analysis I,* Universität Mannheim, 1998/99, `http://www.math.uni-mannheim.de/~bartels/anaI.ps`

und

[HM1] W.K. SEILER: *Höhere Mathematik I,* Universität Mannheim, 1999

`http://hilbert.math.uni-mannheim.de/HM/hm1ss99.html`

Unter den im letzten Semester angegebenen Lehrbüchern enthält das erste auch den Stoff dieses Semesters:

[D] H.J. DIRSCHMID: *Mathematische Grundlagen der Elektrotechnik,* Vieweg, 1992

Etwa fünf Pfund Mathematik, die nicht nur diese Vorlesung mehr als abdecken, sondern für viele Studenten für deren gesamtes Berufsleben ausreichen dürften. Der Schwerpunkt liegt allerdings eindeutig auf dem Gebiet der Analysis; numerische Mathematik und Statistik sind so gut wie nicht vorhanden.

[MV1] K. MEYBERG, P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik I,* Springer, 1995

reicht aus für den *zweiten* Teil der HM II, d.h. für Kapitel III der Vorlesung; für Kapitel II wird man größtenteils auf den zweiten Band zurückgreifen müssen:

[MV2] K. MEYBERG, P. VACHENAUER: *Höhere Mathematik II,* Springer, 1997

Natürlich enthält dieser Band erheblich mehr Stoff als wir in einem halben Semester behandeln können. Der Stil ist ähnlich wie der des ersten Bandes, wobei hier vielleicht ein bißchen häufiger komplizierte Beweise nur angedeutet werden. Für einige Grundalgorithmen sind Programme angegeben.

[BDH] BRAUCH/DREYER/HAACKE: *Mathematik für Ingenieure Maschinenbau/Elektrotechnik,* Teubner 1977

Dieses Buch richtet sich an Studenten von Fachhochschulen, deckt aber auch einen großen Teil dieser Vorlesung ab; für uns zu knapp ist vor allem die Darstellung der Vektoranalysis für Kapitel III dieser Vorlesung. Dafür gibt es Kapitel, die Themen wie Statistik, Fehlerrechnung, *usw.* ausführlicher darstellen als dies in der Vorlesung der Fall sein wird.

[F] P. FURLAN: *Das gelbe Rechenbuch 1–3,* Verlag Martina Furlan, Dortmund, *o.J.*

Wer vor allem auf Drill und durchgerechnete Beispiele Wert legt, findet hier laut Untertitel „Rechenverfahren der Höheren Mathematik in Einzelschritten erklärt. Mit vielen ausführlich gerechneten Beispielen“. Die drei Bände decken zwar nicht alles ab, aber doch ziemlich viel.

Dazu seien wieder einige „Klassiker“ genannt, die seit mehreren Jahrzehnten in immer neuen Auflagen erscheinen und die auch heute noch interessant sind. Es handelt sich um Werke aus meist recht vielen Bänden, wobei der Stoff der Vorlesung *Höhere Mathematik II* je nach Organisation des Gesamtwerks auf bis zu drei Bände verteilt sein kann. Wegen der Vielzahl von Auflagen und Bänden verzichte ich auf die Angabe von Erscheinungsjahren.

[S] W.I. SMIRNOW: *Lehrbuch der Höheren Mathematik,* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften

Ein Klassiker, nach dem Generationen von russischen und (nicht nur ost-)deutschen Naturwissenschaftlern und Ingenieuren ausgebildet wurden; enthält in vier Bänden (von denen die letzten beiden noch in Halbbände unterteilt sind) den gesamten klassischen Stoff der *Höheren Mathematik* und ist auch heute noch sehr gut zu lesen. Die HM II behandelt hauptsächlich Stoff aus den Band II, für einige wenige Stellen muß man auch die Bände IV/2 und V konsultieren.

[R] R. ROTHE: *Höhere Mathematik,* Teubner

Sieben (dünne) Bände, zu denen allerdings auch Aufgaben- und Formelsammlung gehören, so daß die Darstellung insgesamt eher knapp ist. Für diese Vorlesung relevant sind die Bände III und VI.

[Du] A. DUSCHEK: *Höhere Mathematik,* Springer Wien

Die österreichische Variante in vier recht ausführlichen Bänden. Der Stoff dieses Semesters ist auf die Bände II bis IV verteilt, von denen jeder auch noch vieles enthält, was in der Vorlesung nicht behandelt werden kann.

[A] G. AUMANN: *Höhere Mathematik,* Bibliographisches Institut Mannheim

Drei relativ dünne Taschenbücher, deren erste beide trotzdem fast alles enthalten, was wir in dieser Vorlesung brauchen. Die Darstellung ist natürlich weniger ausführlich als in den dickleibigen Werken, aber das wird nicht jeder Student als Nachteil empfinden. Der Inhalt von Band I ist durch die beiden letzten Semester abgekakt, jetzt geht es um die Bände II und III.

[C] R. COURANT: *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung I+II,* Springer

Ein Klassiker eines berühmten Mathematikers, auch heute noch sehr lesenswert. Trotz des Titels beschränkt sich das Buch nicht auf Analysis, sondern behandelt auch beispielsweise die Lineare Algebra in einem Umfang, der für diese Vorlesung völlig ausreicht. Abgesehen vom letzten Kapitel des ersten Bandes ist für dieses Semester nur der zweite Band relevant.

Kapitel 2 Integraltransformationen und Differentialgleichungen

Differentialgleichungen sind *das* fundamentale Hilfsmittel zur mathematischen Modellierung technischer Systeme; Integraltransformationen liefern zumindest für lineare Differentialgleichungen die wohl wichtigste Methode zu ihrer Lösung. Wir beginnen aber, in direkter Fortsetzung des letzten Semesters, mit einem anderen Aspekt von Integraltransformationen, der harmonischen Analyse.

§1: Die Fourier-Transformation

Die FOURIER-Transformation leistet für nichtperiodische Signale das, was FOURIER-Reihen für periodische Signale leisten; zur Herleitung ihrer Definition und ihrer wesentlichen Eigenschaften gehen wir daher aus von FOURIER-Reihen.

a) Fourier-Reihen und Fourier-Integrale

Im letzten Semester hatten wir periodische Funktionen mittels ihrer FOURIER-Reihen als Überlagerungen reiner Schwingungen dargestellt. Diese Zerlegung einer Funktion in Sinus- und Cosinusschwingungen verschiedener Frequenzen ist nicht nur für periodische Funktionen nützlich; angesichts der Tatsache, daß das Verhalten vieler elektronischer Bauteile von der Frequenz abhängt, würde man gerne *jede* Funktion entsprechend zerlegen. Es ist allerdings klar, daß FOURIER-Reihen, wie wir sie bislang kennen, dazu nicht geeignet sind, denn da dort alle beteiligten Frequenzen Vielfache eine festen Grundfrequenz sind, muß auch die Summe mindestens die der Grundfrequenz entsprechende Periode haben. Trotzdem liefern FOURIER-Reihen einen Ansatz auch für zumindest einige Klassen nichtperiodischer Funktionen.

Für eine beliebige reelle Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wählen wir dazu zunächst eine (große) Periode T und betrachten die Funktion $f_T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$ mit f übereinstimmt und dann periodisch mit Periode T auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt wird. Die FOURIERreihe von f_T ist

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ki\omega t} \quad \text{mit} \quad c_k = \widehat{f}_T(k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ki\omega t}\, dt$$

und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Um f selbst darzustellen, müssen wir T gegen unendlich gehen lassen; um das Verhalten von c_k bei Veränderung von T kontrollieren zu können, definieren wir dazu eine Funktion $C(\nu)$ als

$$C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\nu t}\, dt\,.$$

Mit dieser Definition ist

$$c_k = \frac{1}{T} C(k\omega) = \frac{\omega}{2\pi} C(k\omega)\,,$$

und die FOURIERreihe von f_T läßt sich schreiben als

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega\,.$$

Wäre dies eine endliche Summe, etwa

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} C(k\omega) e^{i(k\omega)t} \omega\,,$$

so könnten wir sie auffassen als RIEMANN-Summe für

$$\int_{-N\omega}^{(N+1)\omega} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu$$

bei einer äquidistanten Unterteilung mit Intervallbreite ω. Falls also ω gegen Null geht (und damit $T = 2\pi/\omega$ gegen unendlich) und gleichzeitig N gegen unendlich, konvergiert die FOURIERreihe gegen das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu\,,$$

sofern dieses existiert.

Im Idealfall sollte also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\nu) e^{i\nu t}\, d\nu \quad \text{mit} \quad C(\nu) \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\nu t}\, dt$$

und wir definieren

Definition: Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\widehat{f}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ \omega \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt \end{cases},$$

so sie existiert, als FOURIER-Transformierte von f.

Damit sollte dann also gelten

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega\,,$$

und diese Konstruktion, die f aus $\widehat{f}$ rekonstruiert, heißt *inverse* FOURIER-*Transformation:*

Definition: Für $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir die Funktion

$$\check{g}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \end{cases}$$

als inverse FOURIER-Transformierte von g.

Offensichtlich ist

$$\check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega) \quad \text{und} \quad \widehat{g}(t) = 2\pi\check{g}(-t)\,.$$

Je nach Buch oder Vorlesung werden die Vorfaktoren gelegentlich auch anders gewählt, beispielsweise stand in der HM II des letzten Jahres der Faktor $1/2\pi$ vor der FOURIER-Transformation selbst statt vor ihrer inversen. Die jetzt gewählte Definition paßt besser zu der aus der hießigen Elektrotechnik; dort wird die FOURIER-Transformation als

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,dt$$

definiert, wobei j wie in der Elektrotechnik üblich für die in der Mathematik und Physik mit i bezeichnete imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ steht, d.h. $F(j\omega) = \widehat{f}(\omega)$.

Einige Autoren bevorzugen es auch, aus Symmetriegründen bei beiden Transformationen einen Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ zu verwenden. In allen Fällen sind die Faktoren so aufeinander abgestimmt, daß für hinreichend gutartige Funktionen die Beziehungen

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t) \quad \text{und} \quad \widehat{\check{f}}(t) = f(t)$$

gelten.

Die Existenz der FOURIER-Transformierten, d.h. die Konvergenz des uneigentlichen Integrals aus der Definition, sowie auch die obigen Formeln für $\check{\widehat{f}}$ und $\widehat{\check{f}}$ sind leider alles andere als selbstverständlich: Für $f(t) = 1$ oder auch $f(t) = e^{i\omega t}$ oder $f(t) = t^n$ und in vielen weiteren Fällen kann das Integral für $\widehat{f}(\omega)$ schon aus ganz trivialen Gründen nicht existieren.

Wenn wir sicher sein wollen, daß alles gut geht, müssen deshalb Bedingungen an die Funktion f stellen. Zur Vorsicht stellen wir zunächst einmal übertrieben starke Forderungen, zeigen, daß mit denen alles gut geht, und schrauben sie dann in einem nächsten Schritt wieder auf ein realistisches Maß herunter.

Definition: Eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *stark abfallend,* wenn die Funktionen

$$t \mapsto \left|t^r f^{(k)}(t)\right|$$

für alle $k, r \geq 0$ beschränkt sind. Die Menge aller stark abfallender Funktionen bezeichen wir als SCHWARZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

KARL HERMAN AMANDUS SCHWARZ (1843–1921), nach dem dieser Raum benannt wurde, ist uns bereits bekannt von der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung aus **[HM1]**, Kap. I, §7*b)*; auch diese Ungleichung wird uns in Kürze wieder begegnen.

Es ist klar, daß auch Summen und skalare Vielfache von stark abfallenden Funktionen stark abfallend sind; der SCHWARZ-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist daher ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

Beispiele: *a)* Die Funktion $f(t) = e^{-t^2}$ liegt in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$: sie ist beliebig oft stetig differenzierbar; ihre Ableitungen haben jeweils die Form $P(t)e^{-t^2}$ mit einem geeigneten Polynom P. Da die Exponentialfunktion schneller wächst als jedes Polynom, geht e^{-t^2} schneller gegen Null als ein Polynom gegen unendlich gehen kann, das Produkt geht also für $t \to \pm\infty$ gegen Null und ist daherauf ganz $\mathbb{R}$ beschränkt.

b) Sei

$$f(t) = \begin{cases} e^{\dfrac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da diese Funktion außerhalb des Intervalls (a, b) verschwindet und im Innern stetig ist, ist sie natürlich beschränkt. Ihre Ableitungen sind Produkte aus rationalen Funktionen mit f selbst; da $f(t)$ für $t \to a$ oder $t \to b$ erheblich schneller gegen null geht, als eine rationale Funktion gegen unendliche gehen kann, haben alle Ableitungen an den Intervallgrenzen den Wert null; die Funktion ist also beliebig oft stetig differenzierbar. Die Beschränktheitsbedingungen sind problemlos: Im kompakten Intervall $[a, b]$ ist jede stetige Funktion beschränkt, und außerhalb sind alle hier betrachteten Funktionen null.

Ein erster Hinweis darauf, daß wir in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nur selten Probleme mit der Existenz von Integralen haben dürften, gibt das folgende

Lemma: *a)* Für eine Funktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existieren

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t)}\,dt\,.$$

b) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\omega \in \mathbb{R}$ existiert das FOURIER-Integral

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,;$$

für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ existiert das inverse FOURIER-Integral

$$\check{g}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\,.$$

c) Die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} \\ (f,g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{cases}$$

macht $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu einem HERMITEschen Vektorraum.

Beweis: a) Da sowohl $f(t)$ als auch $t^2 f(t)$ beschränkt sind, ist auch $(1+t^2)f(t)$ beschränkt, es gibt also eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so daß

$$|f(t)| \le \frac{C}{1+t^2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\,.$$

Da das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \int_{-a}^{b} \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{a,b\to\infty} \big(\arctan b - \arctan(-a)\big) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

konvergiert, können wir das Majorantenkriterium aus **[Ba]**, §4.3, *Aussage (3.8)* anwenden und die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

über f folgern. Damit ist auch *b)* bewiesen, d.h. die Konvergenz aller Integrale $\widehat{f}(\omega)$ und $\check{g}(t)$, denn da $e^{\pm i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist auch für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ *bzw.* $t \in \mathbb{R}$

$$|f(t)| = \left|f(t)\cdot e^{-i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+t^2}$$

bzw.

$$|g(\omega)| = \left|g(\omega)\cdot e^{i\omega t}\right| \le \frac{C}{1+\omega^2}\,.$$

Genauso läßt sich auch das Integral über $f(t)\overline{f(t)}$ abschätzen, denn da $|tf(t)|$ beschränkt ist, ist auch $\left|t^2 f(t)\overline{f(t)}\right|$ und damit $(1+t^2)f(t)\overline{f(t)}$ beschränkt. (Betragsstriche sind hier natürlich überflüssig.)

b) Da wir gerade gesehen haben, daß das rechtsstehende Integral im Spezialfall $f = g$ existiert, zeigt die CAUCHY-SCHWARZsche Ungleichung

$$(f,g)^2 \le (f,f)\cdot(g,g)\,,$$

daß es auch im allgemeinen Fall konvergiert. Die Eigenschaften eines HERMITEschen Skalarprodukts sind klar bis auf die Eigenschaft, daß nur die Nullfunktion Skalarprodukt null mit sich selbst haben darf, aber da wir es hier mit beliebig oft stetig differenzierbaren und damit insbesondere stetigen Funktionen zu tun haben, folgt dies genauso wie in **[HM1]**, *Kap. I,* §7*a)* für das Skalarprodukt auf dem Vektorraum aller stetiger Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$. ■

b) Der Satz von Fubini

Wenn wir die FOURIER-Transformation auch wieder rückgängig machen wollen, wissen wir nur dann, daß $\check{\widehat{f}}$ existiert, wenn $\widehat{f}$ wieder stark abfallend ist. Das ist für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ glücklicherweise immer der Fall; bevor wir das zeigen können, brauchen wir aber erst einige andere Eigenschaften der FOURIER-Transformation, die uns auch später noch in anderem Zusammenhang nützlich sein werden. Für diese wiederum benötigen wir einige einfache Aussagen über die Vertauschung von Grenzprozessen. Diese führen uns in die Analysis mehrerer Veränderlicher, die eigentlich erst Gegenstand des nächsten Kapitels ist, allerdings brauchen wir daraus nur wenige einfache Konzepte, die hier schnell *ad hoc* für die vorliegende Situation definiert werden können:

Definition: *a)* Eine Funktion $h\colon [a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ heißt *stetig* im Punkt $(\omega,t)\in[a,b]\times[c,d]$, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$ gibt, so daß $\left|h(\omega',t')-h(\omega,t)\right|<\varepsilon$ ist für jeden Punkt $(\omega',t')\in[a,b]\times[c,d]$ mit $\left|\omega'-\omega\right|<\delta$ und $\left|t'-t\right|<\delta$. *b)* Die Funktion h heißt *stetig,* wenn sie in jedem Punkt $(\omega,t)\in[a,b]\times[c,d]$ stetig ist. *c)* h heißt *gleichmäßig stetig,* wenn zusätzlich das δ aus *a)* nicht vom Punkt (ω,t) abhängt. *d)* Falls der Grenzwert

$$h_\omega(\omega_0,t_0)=\frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega_0,t_0)=\lim_{k\to 0}\frac{h(\omega_0+k,t_0)-h(\omega_0,t_0)}{k}$$

existiert, heißt h *partiell differenzierbar* nach ω und der Grenzwert selbst wird als partielle Ableitung von h nach ω im Punkt (ω_0,t_0) bezeichnet. *e)* Falls auch $\frac{\partial h}{\partial\omega}$ partiell nach ω differenzierbar ist, bezeichnen wir diese Ableitung als zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2 h}{\partial\omega^2}$; entsprechend ist die r-te partielle Ableitung $\frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}$ definiert.

Lemma: *a)* Die Funktion $h\colon[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist auch

$$H\colon\begin{cases}[a,b]\to\mathbb{R}\\[2ex] \omega\mapsto\displaystyle\int_c^d h(\omega,t)\,dt\end{cases}$$

stetig.
b) Ist h zusätzlich r-mal stetig partiell nach der ersten Variablen ω differenzierbar, so ist

$$\frac{d^rH}{d\omega^r}(\omega)=\int_c^d\frac{\partial^r h}{\partial\omega^r}(\omega,t)\,dt\,.$$

Beweis: a) Da $[a,b]$ und $[c,d]$ abgeschlossene Intervalle sind, ist h nicht nur stetig, sondern sogar gleichmäßig stetig. Es gibt deshalb zu jedem $\varepsilon>0$ ein $\delta>0$, so daß für jedes $t\in[c,d]$ gilt

$$|h(\omega_1,t)-h(\omega_2,t)|<\varepsilon\quad\text{falls}\quad|\omega_1-\omega_2|<\delta\,.$$

Für solche ω_1 und ω_2 ist dann

$$|H(\omega_1)-H(\omega_2)|\le\int_c^d|h(\omega_1,t)-h(\omega_2,t)|\;dt<\varepsilon(d-c)\,.$$

Da $d-c$ eine Konstante ist, läßt sich dies durch Wahl von $\varepsilon=\eta/(d-c)$ unter jedes vorgegebene $\eta>0$ drücken.

b) Für $\Delta\ne 0$ ist

$$\frac{H(\omega+\Delta)-H(\omega)}{\Delta}=\int_c^d\frac{h(\omega+\Delta,t)-h(\omega)}{\Delta}\,dt\,,$$

und der rechtsstehende Integrand ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (**[Ba]**, §3.2, *Aussage (2.4)*) gleich $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi,t)$ für ein ξ zwischen ω und $\omega+\Delta$. Für $\Delta\to 0$ geht dies gegen $\frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega,t)$, und da die partielle Ableitung als stetig vorausgesetzt ist, gilt wegen *a),* daß

$$H'(\omega)=\lim_{\xi\to\omega}\int_c^d\frac{\partial h}{\partial\omega}(\xi,t)\,dt=\int_c^d\frac{\partial h}{\partial\omega}(\omega,t)\,dt$$

ist, wie behauptet. Für $r>1$ folgt die Behauptung induktiv. ∎

Als erste Anwendung folgt ein Satz über die Vertauschung der Integrationsreihenfolge, den wir weiter unten benötigen werden:

Satz von Fubini: Für eine stetige Funktion $h\colon[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b\left(\int_c^d h(\omega,t)\,dt\right)\,d\omega=\int_c^d\left(\int_a^b h(\omega,t)\,d\omega\right)\,dt\,.$$

Beweis: Für $a\le x\le b$ sei

$$H(\omega)=\int_c^d\left(\int_a^\omega h(\xi,t)\,d\xi\right)\,dt\,.$$

Nach der zweiten Aussage des gerade bewiesenen Lemmas ist dann

$$H'(\omega) = \int_c^d h(\omega, t)\, dt\,,$$

also ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung

$$\int_a^b \left(\int_c^d h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_a^b H'(\omega)\, d\omega = H(b) - H(a) = H(b)\,,$$

und das ist nach Konstruktion gleich der rechten Seite. ■

Der italienische Mathematiker GUIDO FUBINI (1879–1943) arbeitete zunächst auf dem Gebiet der Differentialgeometrie, interessierte sich dann aber immer mehr für analytische Themen wie Differentialgleichungen und Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher. 1901 wurde er Professor in Catania auf Sizilien, später in Genua und ab 1908 in Turin, wo er blieb, bis er 1939 trotz seiner angegriffenen Gesundheit wegen des italienischen Faschismus nach USA emigrierte und ans Institut for Advanced Study in Princeton wechselte. Der hier zitierte Satz ist zwar sein bekanntestes, aber ganz sicher nicht sein bedeutendstes Ergebnis.

Wir interessieren uns im Augenblick nicht für Integrale über endliche Intervalle, sondern für Intergrale über die gesamte reelle Gerade, bevor wir den gerade bewiesenen Satz auf FOURIER-Integrale anwenden können, müssen wir also noch den Grenzübergang $a, c \to -\infty$ und $b, d \to +\infty$ durchführen. Nach dem WEIERSTRASSschen Konvergenzkriterium (**[Ba]**, *Kap. 5, Satz 1.11*) gibt es hier keine Probleme, *falls* die betroffenen Integrale absolut konvergent sind. Die für uns interessante Version des Satzes von FUBINI ist also

Satz: Die stetige Funktion $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei so, daß die uneigentlichen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)|\, dt \right) d\omega \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(\omega, t)|\, d\omega \right)$$

beide konvergieren. Dann ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t)\, dt \right) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega, t)\, d\omega \right) dt\,.$$

■

c) Fourier-Integrale und Ableitungen

Die Aussagen des vorigen Abschnitts führen geradewegs auf Eigenschaften der FOURIER-Transformation; als erstes erhalten wir

Lemma: Für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und alle $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{d^r}{d\omega^r} \widehat{f}(\omega) = (-i)^r\, \widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r \widehat{f}(\omega) = (-i)^r\, \widehat{f^{(r)}}(\omega)\,.$$

Beweis: Nach dem Lemma im vorigen Abschnitt ist

$$\frac{d^r \widehat{f}(\omega)}{d\omega^r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^r}{d\omega^r} \left(f(t) e^{-i\omega t} \right) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^r f(t) e^{-i\omega t}\, dt = (-i)^r\, \widehat{t^r f}(\omega)\,,$$

womit die erste Aussage bewiesen wäre.

Für die zweite begnügen wir uns der Einfachheit halber mit dem Fall $r = 1$, aus dem die allgemeine Aussage per Induktion folgt. Für $r = 1$ ist

$$\omega \widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \omega e^{-i\omega t}\, dt\,,$$

und dieses Integral läßt sich durch partielle Integration weiter umformen. Dazu nehmen wir $f(t)$ als den ersten Faktor und $\omega e^{-i\omega t}$ als den zweiten; letzterer hat die Stammfunktion

$$\frac{\omega e^{-i\omega t}}{-i\omega} = ie^{-i\omega t},$$

und wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\omega e^{-i\omega t}\,dt = \quad f(t)\cdot ie^{-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t)\cdot ie^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Da f im SCHWARZ-Raum liegt, strebt $f(t)$ für $t\to\pm\infty$ gegen null, der erste Summand verschwindet also und übrig bleibt

$$\omega\widehat{f}(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty}\dot{f}'(t)e^{-i\omega t}\,dt = -i\cdot\widehat{\dot{f}}(\omega)\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ■

Die beiden Aussagen dieses Lemmas sind zentral für so ziemlich alle Anwendungen nicht nur der FOURIER-Transformation, sondern, wie wir bald sehen werden, auch für die Anwendung von Integraltranformationen überhaupt auf Differentialgleichungen.

Als erste Anwendung wollen wir uns (modulo einer kleinen Lücke, die erst im nächsten Kapitel wirklich geschlossen werden kann) überlegen, daß die inverse FOURIER-Transformation wirklich invers zur FOURIER-Transformation ist. Die Strategie ist folgende: Wir zeigen zunächst, daß dies für *eine* spezielle Funktion $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt, und folgern daraus in einem zweiten Schritt, daß dies für *alle* $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ der Fall ist.

Für die eine spezielle Funktion aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ haben wir nicht viel Auswahl: Wir kennen bislang im wesentlichen nur zwei Beispiele, nämlich $f(t)=e^{-t^2}$ und $f(t)=e^{-1/(t-a)(b-t)}$ auf (a,b) und null sonst. Da das erste Beispiel etwas harmloser aussieht, nehmen wir dieses, und da es den Aufwand kaum vergrößert, später aber nützlich sein wird, verallgemeinern wir es leicht zu

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \quad\text{mit}\quad \sigma\in\mathbb{R}\,.$$

Diese Funktion heißt GAUSS-Funktion mit Varianz σ^2; ihr Graph wird auch oft als *Glockenkurve* bezeichnet. Abbildung 1 zeigt die Kurven für $\sigma=1/2$ (gepunktet), $\sigma=1$ (ausgezogen) und $\sigma=2$ (gestrichelt); wie man sieht, wird die Kurve flacher für größere σ, wohingegen kleine σ zu einem schärfer ausgeprägten Maximum führen. Im Abschnitt über Fehlerrechnung werden uns noch genauer mit dieser Funktion beschäftigen.

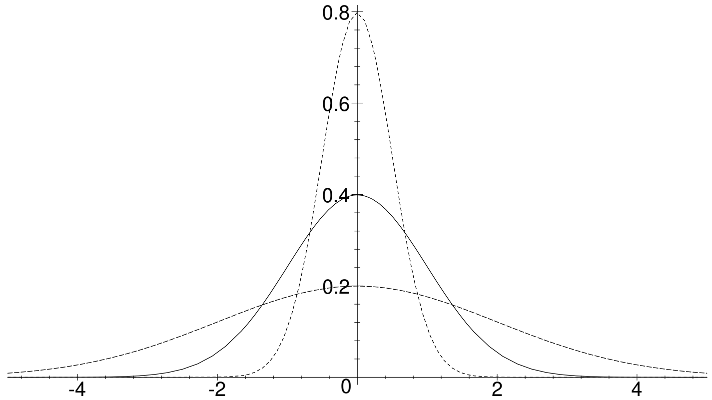

Abb. 1: Gaußkurven für $\sigma=\frac{1}{2}$, 1 und 2

Nach Definition ist

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\,dt\,,$$

aber da schon die Stammfunktion von e^{-t^2} nicht elementar ausdrückbar ist, haben wir sicherlich wenig Chancen, dieses Integral über eine Stammfunktion zu berechnen.

Das Lemma aus dem vorigen Abschnitt erlaubt uns aber, Aussagen über die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ machen:

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = (-i)\cdot\widehat{tf}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Der neue Integrand ist ziemlich ähnlich zur Ableitung des alten, denn

$$\frac{d}{dt}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t} = -\left(\frac{t}{\sigma^2}+i\omega\right)e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\right) = (t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,.$$

Die Funktion, die hier abgeleitet wird, geht für $t \to \pm\infty$ gegen null, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t+i\omega\sigma^2)\,e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0\,,$$

und damit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -i\omega\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt\,.$$

Die Ableitung von $\widehat{f}(\omega)$ ist daher

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}\sigma}(-i\omega\sigma^2)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}-i\omega t}\,dt = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Somit ist $\widehat{f}(\omega)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega) = -\omega\sigma^2\cdot\widehat{f}(\omega)\,.$$

Diese Differentialgleichung hat auch die Lösung

$$g(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,,$$

wie man durch zweimalige Differentiation von $g(\omega)$ leicht nachrechnet, und für den Quotienten dieser beiden Lösungen ist

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\widehat{f}(\omega)}{g(\omega)}\right) &= \frac{d}{d\omega}\left(\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\right)\\ &= \frac{d\widehat{f}}{d\omega}(\omega)\cdot e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \widehat{f}(\omega)\cdot\sigma^2\omega e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\\ &= -\omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} + \omega\sigma^2\widehat{f}(\omega)e^{\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = 0\,.\end{aligned}$$

Also ist der Quotient eine Konstante, d.h.

$$\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(0)\cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\,.$$

Damit ist uns die FOURIER-Transformierte von f bekannt bis auf die Konstante

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt\,.$$

Hier muß nun leider zumindest vorläufig eine Lücke bleiben, denn dieses Integral können wir erst im nächsten Kapitel ausrechnen; das Ergebnis wird sein

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\,dt = 1\,.$$

Als Endergebnis erhalten damit

$$\widehat{f}(\omega) = e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}(1/\sigma)}e^{\frac{-\omega^2}{2\cdot(1/\sigma)^2}}\,,$$

wobei die kompliziertere zweite Form zeigt, daß wir abgesehen vom Vorfaktor $\sqrt{2\pi}/\sigma$ wieder eine GAUSS-Funktion erhalten, allerdings mit Varianz $1/\sigma^2$.

Mit der Abkürzung

$$N_\sigma(t) \underset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{\frac{-t^1}{2\sigma^2}}$$

können wir also kurz schreiben

$$\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}N_{1/\sigma}(\omega)\,.$$

Damit kennen wir natürlich auch die inverse FOURIER-Transformierte einer GAUSS-Funktion, denn nach den allgemeinen Rechenregeln ist

$$\check{N}_\sigma(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{N_\sigma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}N_{\frac{1}{\sigma}}(\omega)\,.$$

Insbesondere können wir damit nachrechen, daß die *inverse* FOURIER-Transformation zumindest in diesem Beispiel tatsächlich invers zur FOURIER-Transformation ist, d.h.

$$\check{\hat{N}}_\sigma(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma}\check{N}_{\frac{1}{\sigma}}(t) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\frac{1}{\sigma}} N_\sigma(t) = N_\sigma(t)\,.$$

Genauso zeigt man, daß auch

$$\widehat{\check{N}}_{\sigma(t)} = N_\sigma(t)$$

ist; die beiden Transformationen sind hier also in der Tat invers zueinander.

d) Die Umkehrung der Fourier-Transformation

Wie angekündigt, soll aus dem Beispiel des vorigen Abschnitts nun in einem zweiten Schritt gefolgert werden, daß dies nicht nur für die Funktionen N_σ gilt, sondern für *alle* Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, d.h.

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren zueinander inverse lineare Abbildungen

$$\begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ g \mapsto \check{g} \end{cases}.$$

Insbesondere sind also beide Abbildungen Isomorphismen, und für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)\,.$$

Für das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \check{f}(\omega)\overline{\check{g}(\omega)}\,d\omega\,,$$

also insbesondere auch

$$\|f\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\hat{f}\right\|_2 = \sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2\,.$$

Beweis: Die Linearität ist, wie bei jedem Integral, klar; das Problem ist, ob $\hat{f}$ und $\check{g}$ stark abfallend sind. Betrachten wir zunächst nur die Produkte $\omega^r \hat{f}(\omega)$. Für diese ist

$$\left|\omega^r \hat{f}(\omega)\right| = \left|(-i)^r \widehat{f^{(r)}}(\omega)\right| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} f^{(r)}(t)e^{-i\omega t}\,dt\right|$$

$$\le \int_{-\infty}^{\infty} \left|f^{(r)}(t)\right|\,dt < \infty\,,$$

da f stark abfallend ist. Für

$$\omega^r \hat{f}^{(k)}(\omega) = \omega^r(-i)^k\widehat{t^k f}(\omega)$$

können wir genauso argumentieren, und wegen des Zusammenhangs zwischen FOURIER-Tranformation und inverser FOURIER-Tranformation folgt daraus auch das Ergebnis für $\check{g}$.

Als nächstes wollen wir uns überlegen, daß für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\check{\hat{f}}(t) = f(t)$$

ist. Dazu benutzen wir zwei zunächst beliebige weitere Funktionen $g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, die wir im Laufe der Rechnung nach Bedarf genauer festlegen werden.

Nach Definition ist

$$\check{\hat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

wir betrachten das etwas allgemeinere Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}ds\right)e^{i\omega t}g(\omega)\,d\omega\,,$$

das wir nach dem Satz von FUBINI weiter ausrechnen können als

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega(s-t)}\,d\omega\right)ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\hat{g}(s-t)\,ds\,.$$

Nun sei a eine positive reelle Konstante und $g(\omega) = h(a\omega)$, wobei die Funktion $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Augenblick noch beliebig ist. Dann führt die Substitution $\nu = a\omega$ auf

$$\begin{aligned}\widehat{g}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(a\omega)e^{-i\omega s}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,\frac{d\nu}{a}\\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} h(\nu)e^{-i\nu\frac{s}{a}}\,d\nu = \frac{1}{a}\widehat{h}\left(\frac{s}{a}\right).\end{aligned}$$

und nach obiger Rechnung ist daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\cdot\frac{1}{a}\cdot\widehat{h}\left(\frac{s-t}{a}\right)\,ds\,.$$

Mit der neuen Variablen

$$u \underset{\text{def}}{=} \frac{s-t}{a}$$

ist $s = t + au$ und wir können diese Formel auch kürzer schreiben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(a\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+au)\cdot\widehat{h}(u)\,du\,.$$

Beide Seiten sind stetig in a; für $a \to 0$ erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}h(0)\,d\omega = h(0)\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = 2\pi\cdot h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t)$$

und rechts

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\widehat{h}(u)\,du = f(t)\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\widehat{h}(u)\,du = 2\pi\cdot f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Also ist für zwei beliebige Funktionen $f, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stets

$$h(0)\cdot\check{\widehat{f}}(t) = f(t)\cdot\check{\widehat{h}}(0)\,.$$

Setzen wir nun für h speziell eine GAUSS-Funktion ein, etwa

$$h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{2}}\,,$$

so wissen wir bereits aus dem obigem Beispiel, daß $\check{\widehat{h}}$ und h übereinstimmen; insbesondere haben beide an der Stelle $\omega = 0$ den von null verschiedenen Wert $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, so daß wir durch diesen Wert dividieren können und die gewünschte Formel

$$\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$$

erhalten. Wegen der Beziehungen

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = 2\pi\check{\check{f}}(-\omega) \quad \text{und} \quad \check{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\omega)$$

ist dann auch

$$\widehat{\check{f}}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi f\big(-(-\omega)\big) = f(\omega)\,.$$

Zu beweisen bleibt noch, daß die beiden Transformationen auch das HERMITEsche Skalarprodukt auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ respektieren. Dazu wiederholen wir einfach die Rechnung zu Beginn des Beweises ohne den Faktor $e^{i\omega t}$: Für eine beliebige Funktion $g(\omega)$ aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt\right)g(\omega)\,d\omega$$

nach dem Satz von FUBINI gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}\,d\omega\right)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,,$$

wir haben also die Beziehung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)g(\omega)\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widehat{g}(t)\,dt\,. \tag{$*$}$$

Um daraus Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt herzuleiten, benutzen wir die Beziehungen

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \check{\widehat{f}}(-t) = 2\pi f(-t) \quad \text{oder} \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\widehat{\widehat{f}}(-t) \qquad (**)$$

und

$$\begin{aligned}\overline{\widehat{g}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,\overline{e^{-i\omega t}}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(t)\,e^{i\omega t}\,dt \\ &= -\int_{\infty}^{-\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g}(-t)e^{-i\omega t}\,dt \qquad (***) \\ &= \widehat{\overline{g}}(-t)\,,\end{aligned}$$

wobei der Übersichtlichkeit halber $\overline{g}$ für diejenige Funktion steht, die jedem Wert t den Funktionswert $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ zuordnet und entsprechend $\overline{\widehat{g}}(t) = \overline{\widehat{g}(t)}$ ist.

Damit läßt sich das HERMITEsche Skalarprodukt folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}(f,g) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{f}}(-t)\widehat{\widehat{\overline{g}}}(-t)\,dt \\ &\underset{(*)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\widehat{\widehat{f}}}(-t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \underset{(**)}{=} \frac{1}{4\pi^2}\cdot 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\widehat{\overline{g}}(-t)\,dt \\ &\underset{(***)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{g}}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f},\widehat{g})\,.\end{aligned}$$

Die Aussage über das Produkt der inversen FOURIER-Transformierten folgt nun einfach daraus, daß die beiden Transformationen zueinander invers sind:

$$(\check{f},\check{g}) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{\check{f}},\widehat{\check{g}}) = \frac{1}{2\pi}(f,g)\,.$$

■

Bemerkung: Falls wir für beide Transformationen den Vorfaktor $1/\sqrt{2\pi}$ gewählt hätten, würden beide das HERMITEsche Skalarprodukt respektieren, allerdings müßten wir uns dann ständig mit dieser Wurzel vor den Integralen herumschlagen. So hat jede Normierung ihre Vor- und Nachteile.

Mit dem gerade bewiesenen Satz haben wir eine einigermaßen befriedigende Theorie der FOURIER-Transformation auf dem SCHWARZ-Raum der stark abfallenden Funktionen. Dies genügt freilich nicht, denn wir möchten auch Funktionen transformieren, die *nicht* unendlich oft stetig differenzierbar sind. Für die *Existenz* des FOURIER-Integral brauchen wir die Differenzierbarkeit nicht:

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt *absolut integrierbar,* wenn das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt$$

existiert.

Lemma: Für eine absolut integrierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ existiert die FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Beweis: Da $e^{-i\omega t}$ den Betrag eins hat, ist $|f(t)e^{-i\omega t}| = |f(t)|$; die Funktion $f(t)e^{-i\omega t}$ ist also absolut integrierbar, und damit existiert erst recht das uneigentliche Integral über die Funktion selbst.

■

Es ist möglich, eine befriedigende Theorie der FOURIER-Transformation für absolut integrierbare Funktionen zu entwickeln; die Beweise sind allerdings mathematisch recht aufwendig. Wir wollen uns daher mit weniger zufrieden geben und uns nur überlegen, daß wir eine vernünftige Theorie haben für die Funktionen, die in der Informationstechnik üblicherweise vorkommen. Solche Funktionen liegen stets in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$, denn bei praktisch allen Anwendungen ist $\|f\|_2$ abgesehen von konstanten Vorfaktoren gleich der Energie oder Leistung des Signals f, und die muß natürlich endlich sein.

Für zwei Funktionen $f,g\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ können wir $\|f-g\|_2$ als *Abstand* zwischen f und g interpretieren, und mit diesem Abstandsbegriff können wir versuchen, Funktionen die nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegen, durch Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ anzunähern:

Erinnern wir uns an die *Analysis I:* Durch wurde für eine Teilmenge $A\subset\mathbb{R}^n$ der Abschluß $\overline{A}\subseteq\mathbb{R}^n$ definiert durch

$$\overline{A}=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\;\middle|\;\begin{array}{l}\text{Es gibt eine Folge } (\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{von } \mathbf{x}_n\in A \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{x}_n=\mathbf{x}\end{array}\right\}.$$

In $\mathbb{R}$ ist beispielsweise $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, da jede reelle Zahl beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden kann, und der Abschluß eines offenen Intervalls ist das entsprechende abgeschlossene Intervall. Entsprechend ist im $\mathbb{R}^2$ der Abschluß der offenen Kreisscheibe gleich der angeschlossenen Kreisscheibe und so weiter.

Genauso können wir den Abschluß von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ im Raum der absolut integrierbaren Funktionen aus $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ definieren:

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\underset{\text{def}}{=}\left\{f\in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\;\middle|\;\begin{array}{l}f \text{ ist absolut integrierbar und}\\ \text{es gibt eine Folge } (f_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ \text{von } f_n\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ mit } \lim\limits_{n\to\infty}f_n=f\end{array}\right\}.$$

Die Konvergenz ist hier natürlich im Sinne der L^2-Norm zu verstehen, und nach Definition von $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ sind die Elemente $f\in\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ strenggenommen keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen, da wir alle Funktionen $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, für die $(f,f)=0$ ist, mit der Nullfunktion identifizieren. Damit können wir für zwei Funktionen $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, die dasselbe Element von $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ definieren nicht sagen, daß $f(t)$ und $g(t)$ für alle $t\in\mathbb{R}$ übereinstimmen; im letzten Semester hatten wir deshalb die Sprechweise $f(t)=g(t)$ *für fast alle* $t\in\mathbb{R}$ eingeführt um auszudrücken, daß $\|f-g\|_2=0$ ist. Mit dieser Sprechweise gilt dann

Satz: Die FOURIER-Transformation und die inverse FOURIER-Transformation definieren lineare Abbildungen

$$\begin{cases}\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\to\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\\ f\mapsto\widehat{f}\end{cases}\quad\text{und}\quad\begin{cases}\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\to\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}\\ g\mapsto\check{g}\end{cases}$$

mit der Eigenschaft, daß

$$\check{\widehat{f}}(t)=f(t)\quad\text{und}\quad\widehat{\check{g}}(t)=g(t)\quad\text{für fast alle } t\in\mathbb{R}\,.$$

Für das HERMITEsche Produkt auf $\overline{\mathcal{S}^2(\mathbb{R})}$ gilt

$$(f,g)=\frac{1}{2\pi}(\widehat{f},\widehat{g})=2\pi(\check{f},\check{g})\,,$$

also insbesondere auch

$$\|f\|_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f}\right\|_2=\sqrt{2\pi}\left\|\check{f}\right\|_2\,.$$

Falls $\widehat{f}$ *bzw.* f hinreichend oft differenzierbar sind, gilt außerdem

$$\frac{d^r}{d\omega^r}\widehat{f}(\omega)=(-i)^r\widehat{t^r f}(\omega)$$

und

$$\omega^r\widehat{f}(\omega)=(-i)^r\widehat{f^{(r)}}(\omega)$$

für alle $\omega\in\mathbb{R}$.

Beweis: Wir wissen schon, daß für $f\in\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ die FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}\colon\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ \omega\mapsto\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\end{cases}$$

existiert. Schreiben wir f als Limes einer Folge von Funktionen $f_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$, so wissen wir nach dem obigen Satz, daß die FOURIER-Transformierten $\widehat{f_k}$ wieder in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ liegen und daß

$$\|f_\ell-f_k\|_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\|\widehat{f_\ell}-\widehat{f_k}\right\|_2$$

ist. Mit der Folge der f_k konvergiert daher nach dem CAUCHYschen Konvergenzkriterium auch die der $\widehat{f}_k$. Da für jedes $N > 0$ die Folge der Integrale

$$\int_{-N}^{N} f_k(t)e^{-i\omega t}\,dt \quad \text{gegen} \quad \int_{-N}^{N} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

konvergiert, muß der Grenzwert fast überall gleich $\widehat{f}$ sein, d.h. diese Funktion existiert und liegt in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Genauso zeigt man die entsprechende Aussage für $\check{g}$.

Die Linearität ist klar, und da $\check{\widehat{f}}_k(t) = f_k(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist im Grenzwert immer noch $\check{\widehat{f}}(t) = f(t)$ für fast alle $t \in \mathbb{R}$. Entsprechend folgen auch die Aussagen über das HERMITEsche Skalarprodukt.

Bei den Aussagen über die Ableitungen schließlich können wir den Beweis des entsprechenden Lemmas für Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wörtlich übernehmen; das einzige, was wir aus der Voraussetzung $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gefolgert haben, ist, daß die FOURIER-Transformierte existiert und daß $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 0$ ist; beides gilt auch für $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

■

Damit haben wir auch auf $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ eine gute FOURIER-Theorie, ein echter Fortschritt gegenüber der bisherigen Situation ist dies aber nur dann, wenn die Funktionen, die uns interessieren, auch in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ liegen.

Beginnen wir mit dem Rechteckimpuls

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

für zwei reelle Zahlen $a < b$.

Wir kennen bereits eine Funktion in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, die auch außerhalb des Intervalls (a,b) verschwindet und in dessen Innern positiv ist, nämlich die Funktion

$$g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

Allgemeiner hat für jede reelle Zahl $r > 0$ auch

$$g_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

dieselbe Eigenschaft. Da $(t-a)(b-t)$ bei $t = (a+b)/2$ maximal wird, hat g_r dort sein einziges Maximum und

$$g_r\left(\frac{a+b}{2}\right) = e^{\frac{-4r}{(b-a)^2}}\,.$$

Unser Rechteckimpuls hat eins als Maximalwert; deshalb betrachten wir besser anstelle der g_r die mit dem Kehrwert des Maximums multiplizierten Funktionen

$$f_r\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} e^{\frac{4r}{(b-a)^2}}\, e^{\frac{-r}{(t-a)(b-t)}} & \text{falls } a < t < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{cases},$$

die alle bei $(a+b)/2$ ihren Maximalwert eins annehmen.

Abbildung 2 zeigt für $a = 2$ und $b = 7$ die entsprechenden Funktionen mit $r = 10$, $r = 1$ und für $r = 0{,}1$. Die innerste Kurve für $r = 10$ zeigt noch ein klar ausgeprägtes Maximum, die Kurve für $r = 1$ ist schon deutlich flacher im mittleren Teil, und die für $r = 0{,}1$ schließlich erinnert schon recht gut an den Rechteckimpuls f.

Diese Abbildung legt die Vermutung nahe, daß die f_r für $r \to 0$ in der L^2-Norm gegen f konvergieren. Leider können wir aber $\|f - f_r\|_2$ nicht ausrechnen, da wir keine Stammfunktion von f_r kennen. (Schon e^{-t^2} ist

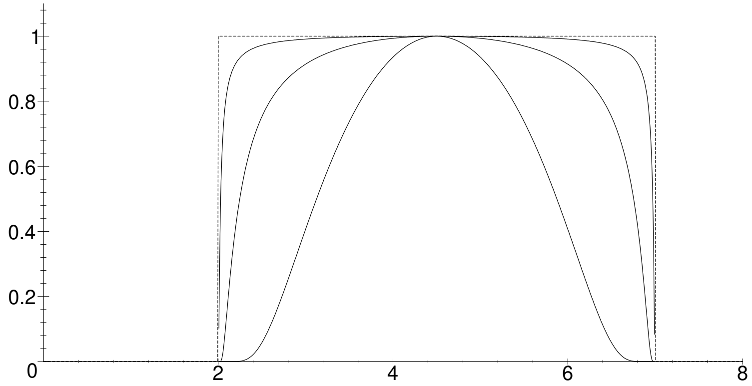

Abb. 2: Approximation des Rechteckimpulses durch stark abfallende Funktionen

schließlich nicht elementar integrierbar.) Deshalb müssen wir uns mit Abschätzungen begnügen. Wir erwarten, daß f_r im mittleren Bereich immer besser mit der Geraden auch Höhe eins übereinstimmt, während es am Rand des Intervalls immer steiler gegen null geht. Daher wählen wir ein $\delta > 0$ und betrachten getrennt denn mittleren Teil $[a+\delta, b-\delta]$ des Intervalls und die beiden Randintervalle $[a, a+\delta]$ und $[b-\delta, b]$.

Über das Verhalten von f_r in den Randintervallen können wir so gut wie nichts sagen; wir wissen nur, daß auf jeden Fall $0 \le f_r(t) \le 1$ ist und schätzen die Differenz zwischen $f(t) = 1$ und $f_r(t)$ daher ab durch eins.

Im mittleren Intervall ist die Differenz zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ im Intervallmittelpunkt $(a+b)/2$ gleich null und wächst dann, wie man sich durch Ableiten von f_r leicht überzeugt, monoton; die maximale Abweichung zwischen $f(t)$ und $f_r(t)$ wird also an den Endpunkten $a+\delta$ und $b-\delta$ angenommen, wo f_r jeweils den Wert

$$e^{\frac{4r}{(b-a)^2}} e^{\frac{-r}{\delta(1-\delta)}} = e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)}$$

hat. Für $t \in [a+\delta, b-\delta]$ gilt daher

$$f(t) - f_r(t) \le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} .$$

Dieser Ausdruck ist nicht sehr angenehm, wir sollten ihn also weiter abschätzen. Nach Konstruktion von f_r ist der Exponent negativ, und für alle $x \ge 0$ ist $1 - e^{-x} \le x$, denn dies gilt für $x = 0$, und die Ableitung e^{-x} von $1 - e^{-x}$ ist für jedes positive x kleiner als die Ableitung eins von x. Daher ist für $t \in [a+\delta, b-\delta]$

$$\begin{aligned} f(t) - f_r(t) &\le 1 - e^{-r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)} \\ &\le r\left(\frac{1}{\delta(1-\delta)} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns vor allem für kleine Werte von δ; deshalb betrachten wir im folgenden nur noch Werte $\delta \le \frac{1}{2}$. Dann ist $1 - \delta \ge \frac{1}{2}$ und

$$f(t) - f_r(t) \le r\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right) .$$

Damit können wir die L^2-Norm der Differenz abschätzen:

$$\begin{aligned} \|f - f_r\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt \\ &= \int_a^{a+\delta} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt + \int_{a+\delta}^{b-\delta} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt \\ &\quad + \int_{b-\delta}^{b} |f(t) - f_r(t)|^2\, dt \\ &\le \delta + r^2\left(\frac{2}{\delta} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \delta . \end{aligned}$$

Setzen wir hier speziell $\delta = \sqrt{r}$, was wir für hinreichend kleine r dürfen, so wird dies zu

$$\sqrt{r} + r^2\left(\frac{2}{\sqrt{r}} - \frac{4}{(b-a)^2}\right)^2 + \sqrt{r} = 2\sqrt{r} + r\left(2 - \frac{4\sqrt{r}}{(b-a)^2}\right)^2 ,$$

und dieser Ausdruck geht gegen null für $r \to 0$. Also konvergieren die f_r für $r \to \infty$ in der L^2-Norm gegen f und $f \in \overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$.

Zumindest der Rechteckimpuls f liegt also in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$. Damit liegen dort aber auch noch eine ganze Reihe anderer Funktionen, beispielsweise alle, die außerhalb eines Intervalls $[a, b]$ verschwinden und für die über diesem Intervall

$$\|h\|_2^2 = \int_a^b h(t)\overline{h(t)}\,dt$$

existiert. Eine solche Funktion h kann nämlich fortgesetzt werden zu einer periodischen Funktion p mit Periode $b - a$, die über $[a, b]$ mit h übereinstimmt. Diese periodische Funktion hat eine FOURIER-Reihe, deren Teilsummen wir mit

$$s_k(t) = \sum_{j=-k}^{k} \widehat{p}(k)\, e^{ij\omega t}$$

bezeichnen, wobei

$$\omega = \frac{2\pi}{b - a}$$

ist; nach Abschnitt *c)* konvergiert die Folge der s_k in der L^2-Norm gegen p.

Die Funktionen s_k sind als Linearkombinationen von Exponentialfunktionen beliebig oft stetig differenzierbar; daher sind auch ihre Produkte mit den oben konstruierten Funktionen f_k beliebig oft stetig differenzierbar. Diese Produkte sind daher stark abfallend, denn f_k ist stark abfallend und s_k ist beschränkt. Da die Folge der s_k gegen p konvergiert und die der f_k gegen den Rechteckimpuls f, erwarten wir, daß die Folge der Produkte gegen $pf = h$ konvergiert, und in der Tat ist

$$\begin{aligned}\|h - f_k s_k\|_2 &= \|pf - f_k s_k\|_2 = \|(p - s_k)f + (f - f_k)s_k\|_2\\ &\le \|p - s_k\|_2\,\|f\|_2 + \|f - f_k\|_2\,\|s_k\|_2\\ &\le \|p - s_k\|_2\,(b - a) + \|f - f_k\|_2\,\|p\|_2\,,\end{aligned}$$

was für $k \to \infty$ gegen null geht.

Damit ist also jede quadratintegrierbare Funktion auf einem beschränkten Intervall FOURIER-transformierbar, und beachtet man noch, daß die Summe zweier Funktionen aus $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ wieder in $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ liegt, gilt dasselbe beispielsweise für jede Funktion, die außerhalb eines gewissen Intervalls $[a, b]$ stark abfallend ist und innerhalb quadratintegrierbar; dies dürfte für fast alle praktischen Zwecke, in denen man FOURIER-Transformationen betrachten möchte, ausreichen.

Eine Ausnahme bilden vielleicht noch die reinen Schwingungen wie $f(t) = e^{\omega_0 it}$ oder $g(t) = \cos\omega_0 t$. Hier hätte man gerne eine Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die genau an der Stelle ω_0 von null verschieden ist, beziehungsweise eine Funktion $\widehat{g}(\omega)$, die genau an den Stellen $\pm\omega_0$ nicht verschwindet. Eine solche Funktion taugt aber nicht als FOURIER-Transformierte, denn ihre inverse Transformierte wäre nicht $f(t)$ oder $g(t)$, sondern die Nullfunktion.

Die Abhilfe ist aus der Elektrotechnik bekannt: Man bezeichnet die DIRACsche δ-Distribution als FOURIER-Transformierte von f, und

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)}{2}\,.$$

Auch auf solche Distributionen können wir die oben entwickelte Theorie anwenden:

Definition: Eine lineare Abbildung $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ heißt *Distribution.*

Jede Funktion $g \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definiert in natürlicher Weise eine Distribution, nämlich die lineare Abbildung

$$T_g\colon \begin{cases} L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathbb{C} \\ f \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\,dt \end{cases}.$$

Speziell für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist f durch T_f eindeutig bestimmt: Für $T_f = T_g$ ist T_{f-g} die Nullabbildung, also ist insbesondere

$$T_{f-g}(f - g) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(t) - g(t)\big)\overline{\big(f(t) - g(t)\big)}\,dt = 0\,.$$

Da eine stark abfallende Funktion nach Definition unter anderem auch stetig ist, folgt daraus, daß $f-g$ die Nullfunktion ist, also $f=g$. Für beliebige Funktionen aus $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ folgt entsprechend, daß $f(t)$ und $g(t)$ fast überall gleich sind, wenn $T_f=T_g$ ist.

Nun ist aber nicht jede Distribution von der Form T_f; es gibt beispielsweise für jedes $x\in\mathbb{R}$ auch die Distribution

$$T_x\colon\begin{cases} L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})\to\mathbb{C} \\ \qquad f\mapsto f(x)\end{cases}.$$

Diese kann aufgefaßt werden als Grenzwert der Distributionen zu den Funktionen

$$g_\sigma(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-t^2}{2\sigma}}$$

für $\sigma\to 0$, sie liegt also im Abschluß des Bildes von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. (Bezüglich welcher Norm wir diesen Abschluß definieren, sei hier nicht weiter diskutiert.) Damit können wir wie vorhin beim Abschluß von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$ die Theorie der FOURIER-Transformationen auch für solche Distributionen verallgemeinern. Wie wohl allgemein bekannt, schreibt man die Distribution T_x formal als $T_{\delta(t-x)}$ und schreibt auch

$$T_x(f)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-x)\,dt\,.$$

e) Faltungen

Wir haben schon eine ganze Reihe von Eigenschaften der FOURIER-Transformation teils explizit, teils im Vorbeigehen, bewiesen; so haben wir bereits mehrfach ihre *Linearität* benutzt, d.h.

$$\textit{Für } h(t)=\lambda f(t)+\mu g(t) \ \textit{ ist } \ \widehat{h}(\omega)=\lambda\widehat{f}(\omega)+\mu\widehat{g}(\omega)\,.$$

Das Verhalten unter *Streckungen* haben wir im Beweis der Umkehrformel hergeleitet:

$$\textit{Für } g(t)=f(at) \ \textit{ ist } \ \widehat{g}(\omega)=\frac{1}{a}\widehat{g}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

Auch das Verhalten unter *Verschiebungen* läßt sich leicht ausrechnen: Für $g(t)=f(t+a)$ ist

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-i\omega t}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega(s-a)}\,ds\\ &=e^{i\omega a}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega s}\,ds=e^{i\omega a}\widehat{f}(\omega)\,.\end{aligned}$$

Auch Ableitungen im Zeit- und Frequenzbereich kennen wir:

$$\widehat{f^{(n)}}(\omega)=(i\omega)^n\widehat{f}(\omega)\quad\text{und}\quad\widehat{t^nf}(\omega)=i^n\widehat{f}^{(n)}(\omega)\,.$$

Was uns noch fehlt, ist das Verhalten unter *Faltungen:*

Definition: Für zwei Funktionen $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ heißt

$$f*g\colon\begin{cases}\mathbb{R}\to\mathbb{C}\\ t\mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)\,ds\end{cases}$$

Faltung von f mit g.

Diese Definition erscheint auf den ersten Blick vielleicht etwas seltsam, spätestens der zweite Blick zeigt aber ihre Nützlichkeit. Obwohl wir im Augenblick nur Funktionen einer Veränderlichen betrachten, ist es zum Verständis von Faltungen besser, sie zunächst anhand eines zweidimensionalen Beispiels zu veranschaulichen: Wenn eine Kamera nicht richtig fokusiert ist, liefert sie bekanntlich ein unscharfes Bild; wir wollen versuchen, die mathematisch zu beschreiben. Um nicht gleich in die dritte Dimension gehen zu müssen, gehen wir aus von einem ebenen Bild, gegeben durch eine Funktion $f(x,y)$, die jedem Punkt der abzubildenden Ebene eine Grau- oder sonstigen Wert $f(x,y)$ zuordnet. In der Bildebene sollte dann idealerweise (gleiches Koordinatensystem vorausgesetzt) wieder jedem Punkt (x,y) der Wert $f(x,y)$ zugeordnet sein, aber bei einer defokusierten Kamera ist das natürlich nicht so. Optisch läßt sich das dadurch erklären, daß im Punkt (x,y) der Bildebene nun nicht mehr nur die Strahlen ankommen, die vom Punkt (x, y) der Urbildebene ausgehen, sondern auch noch Strahlen von Nachbarpunkten. Wie stark ein solcher Punkt berücksichtigt wird, hängt bei einem gut korrigierten Objektiv im wesentlichen nur davon ab, wie weit er von (x, y) entfernt ist, es gibt also eine Gewichtsfunktion $g(r)$, so daß der Punkt $(x-u, y-v)$ mit Gewicht $g(\sqrt{u^2+v^2})$ berücksichtigt wird. Um zu sehen, wieviel Licht insgesamt im Punkt (x, y) der Bildebene ankommt, müssen wir die Beiträge aller dieser Punkte aufsummieren beziehungsweise, wenn wir das Bild durch eine kontinuierliche Funktion beschreiben, aufintegrieren. Im Zweidimensionalen führt dies auf das (bislang noch nicht definierte) Zweifachintegral

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x-u, y-v) g(\sqrt{u^2+v^2})\, du\, dv\,,$$

wenn wir auf die eindimensionale Situation vereinfachen, erhalten wir mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)\, g(u)\, du = (f * g)(t)$$

die gerade definierte Faltung.

Unscharfe Bilder sind nicht so überflüssig, wie man im ersten Augenblick denkt: In der Bilderkennung beispielsweise haben Computer immer noch sehr große Schwierigkeiten, die verschiedenen Personen und Gegenstände zu isolieren und zu indentifizieren. Grenzen zwischen verschiedenen Objekten, die durch Kanten gegeben sind, lassen sich zwar relativ einfach erkennen (der Leser überlege sich nur, was die zweite Ableitung der Intensitätsfunktion in so einem Falle macht), welche Kanten zusammengehören ist aber schon deutlich schwieriger zu unterscheiden. Zur Lösung dieses Problems macht man das Bild künstlich unscharf durch Faltung mit einer GAUSS-Funktion $e^{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}$; dadurch verschwinden die weniger wichtigen Kanten, so daß nur noch eine überschaubarere Teilmenge übrigbleibt, die umso kleiner ist, je größer die Varianz σ^2 der GAUSS-Verteilung ist. Beginnend mit einem sehr großen σ, das langsam auf null heruntergefahren wird, kann man also die Kanten in eine Hierarchie der Wichtigkeit einordnen, was die Probleme der Bilderkennung zwar nicht löst, aber doch etwas vereinfacht.

Auch in der Photographie möchte man nicht immer völlig scharfe Bilder: Sowohl bei Portrait- als auch bei Landschaftsaufnahmen werden oft sogenannte *Weichzeichner* verwendet, die mathematisch betrachtet eine Faltung mit einer Gewichtsfunktion realisieren. In der klassischen Photographie sind Weichzeichner entweder spezielle Objektive oder Filter, die vor gewöhnliche Objektive gesetzt werden; in der digitalen Bildverarbeitung kann man einen solchen Effekt durch Faltung mit einer GAUSS-Funktion erreichen. Für Pixelgraphiken werden dabei die Integrale natürlich zu Summen.

Daß sich die Nützlichkeit von Faltungen nicht auf die gerade diskutierten Anwendungen beschränkt, liegt am folgenden

Lemma: Für $h(t) = (f * g)(t)$ ist $\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)$.

Beweis: Nach dem Satz von FUBINI ist

$$\begin{aligned}
\widehat{h}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds \right) e^{-i\omega t}\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s) e^{-i\omega t}\, dt \right) ds \\
&\underset{u=t-s}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, g(s) e^{-i\omega(u+s)}\, du \right) ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u}\, du \right) g(s) e^{-i\omega s}\, ds \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u}\, du \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-i\omega s}\, ds \right) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega)\,,
\end{aligned}$$

wie behauptet. ■

Als erste Anwendung hiervon können wir die FOURIER-Transformierte eines Produkts durch die FOURIER-Transformierten der Faktoren ausdrücken:

Korollar: $\widehat{fg}(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})(\omega)$.

Beweis: Wir wenden das gerade bewiesenen Lemma an auf die FOURIER-Transformierten von f und g; dann ist

$$\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}(t) = \widehat{\widehat{f}}(t) \cdot \widehat{\widehat{g}}(t) .$$

Wie wir wissen, unterscheiden sich FOURIER-Transformation und inverse FOURIER-Transformation durch den Faktor $1/2\pi$ vor der inversen Transformation und das Vorzeichen des Argument, d.h.

$$\widehat{\widehat{f}}(t) = 2\pi \cdot f(-t), \quad \widehat{\widehat{g}}(t) = 2\pi \cdot g(-t) \quad \text{und} \quad \widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}(t) = 4\pi^2 \cdot f(-t)g(-t) .$$

Aus dem gleichen Grund ist $\widehat{\widehat{f} * \widehat{g}}(t) = 2\pi \cdot (\widehat{f} * \widehat{g})(-t)$, also

$$2\pi \cdot (\widehat{f} * \widehat{g})(-t) = 4\pi^2 \cdot \widehat{fg}(-t) \quad \text{oder} \quad (fg)(-t) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{f} * \widehat{g})(-t) .$$

Dies gilt für alle reellen Zahlen t, deshalb können wir das Minuszeichen links und rechts auch weglassen und haben dann die Behauptung des Korollars. ■

Eine weitere interessante Konsequenz dieses Lemmas ist, daß sich Faltungen gelegentlich rückgängig machen lassen: $f * g$ ist durch seine FOURIER-Transformation $\widehat{f} \cdot \widehat{g}$ (fast überall) bestimmt; falls $g(\omega)$ keine Nullstellen hat, kann man die Multiplikation mit $g(\omega)$ durch eine Division rückgängig machen. Eine Grundidee zum Rückgängigmachen der Faltung wäre also die folgende: Ist $h(t)$ die inverse FOURIER-Transformation von $1/\widehat{g}(\omega)$, so hat $(f * g) * h$ FOURIER-Transformierte

$$\widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega) \cdot \widehat{g}(\omega) \cdot \frac{1}{\widehat{g}(\omega} = \widehat{f}(\omega) ,$$

$(f * g) * h$ stimmt also fast überall mit f überein.

Leider ist die Sache aber doch nicht ganz so einfach, denn die Existenz von h ist alles andere als klar: Für eine stark abfallende Funktion $g(\omega)$ ist $1/g(\omega)$ „stark ansteigend“. Das muß aber nicht immer ein Problem sein, denn für praktische Zwecke wird man sowohl den Frequenzbereich, über den integriert wird, als auch den Zeit- oder Ortsbereich oft abschneiden können, so daß nur ein Integral über ein endliches Intervall betrachtet werden muß. Die Formel, die wir gerade benutzt haben, gelten nach dieser Einschränkung des Integrationsintervalls natürlich nicht mehr, zumindest nicht mehr exakt, aber ausgehend von den obigen Formeln kann man mit einigem Geschick doch gelegentlich Formeln finden, die zumindest näherungsweise ein brauchbares Ergebnis liefern. So konnte beispielsweise die NASA die Bilder des falsch fokusierten HUBBLE-Teleskops durch digitale Nachbehandlung so deutlich verbessern, daß die Bildqualität kaum schlechter ist, als sie es bei einem korrekt fokusierten Teleskop gewesen wäre.

f) Der Abtastsatz von Nyquist

Egal ob es um die automatische Erfassung von Meßwerten geht oder um die Aufzeichnung von Musik: Die digitale Darstellung analoger Daten ist wesentlicher Bestandteil der Informationsverarbeitung. Nun ist aber eine beliebige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sicherlich nicht durch ihre Funktionswerte an endlich vielen Stellen oder auch an ein einer diskreten Menge von Stellen bestimmt: Auch wenn wir wissen, daß $f(t) = 0$ ist für jedes ganzzahlige Vielfache von 0,001, wissen wir noch nicht, daß f die Nullfunktion ist: Auch die Funktionen $f(t) = \sin(1000\pi t)$ und $f(t) = -3\sin(5000\pi t)$ haben diese Eigenschaft. Auch bei von null verschiedenen Abtastwerten tritt dieses Problem auf: Beispielsweise stimmen auch die Funktionen

$$f(t) = \cos(500\pi t) \quad \text{und} \quad g(t) = \cos(1500\pi t)$$

für alle ganzzahligen Vielfachen von 0,001 überein, aber sie nehmen hier abwechselnd die Werte $1, 0, -1, 0$ an; siehe Abbildung 3. Da der Frequenzunterschied zwischen den beiden Schwingungen fast dem zwischen Baß und Sopran entspricht, ist klar, daß man die beiden Schwingungen zumindest auf einer Musik-CD nicht miteinander verwechseln darf.

Die Probleme bei den obigen Beispielen beruhen offensichtlich darauf, daß es zu jedem Signal höherfrequente Signale gibt, die an vorgegebenen

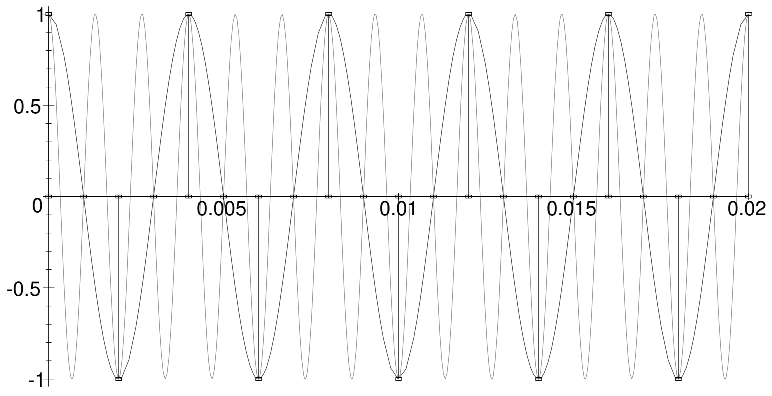

Abb. 3: Abtastung zweier Schwingungen

Punkten mit ihm übereinstimmen; man muß daher eine Grenze festlegen, oberhalb derer Frequenzen nicht mehr berücksichtigt werden sollen. Der Abtastsatz von NYQUIST sagt, wo diese Grenze liegen sollte:

Satz: $f \in \overline{\mathcal{S}}(\mathbb{R})$ habe die Eigenschaft, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb eines Intervalls der Länge Ω verschwinde. Dann ist f eindeutig bestimmt durch die Werte $f(2k\pi/\Omega)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis: (ω_1, ω_2) sei ein Intervall der Länge Ω derart, daß $\widehat{f}(\omega)$ außerhalb dieses Intervalls verschwindet. Dann ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \check{\widehat{f}}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,;$$

indem wir f durch die rechte Seite ersetzen (was nichts wesentliches ändert) können wir annehmen, daß dies für *alle* $t \in \mathbb{R}$ gilt. Also ist insbesondere

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} \widehat{f}(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,.$$

Nun betrachten wir jene Funktion $g(\omega)$, die auf dem Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $\widehat{f}(\omega)$ übereinstimmt und die periodisch mit Periode $2\pi\Omega$ in ω ist.

Für diese Funktion ist dann natürlich auch

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2} g(\omega)e^{2k\pi i\omega/\Omega}\,d\omega\,,$$

denn im Integrationsintervall stimmen $\widehat{f}$ und g überein.

g als periodische Funktion in ω mit Periode Ω hat eine Darstellung als FOURIER-*Reihe*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\lambda\omega} \quad\text{mit}\quad \lambda = \frac{2\pi}{\Omega}\,,$$

und der k-te FOURIER-Koeffizient ist

$$c_k = \frac{1}{\Omega}\int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} g(\omega)e^{-ik\lambda\omega}\,d\omega = \frac{1}{\Omega}\int_{2\pi\omega_1}^{2\pi\omega_2} g(\omega)e^{-i\omega k/\Omega}\,d\omega$$
$$= \frac{2\pi}{\Omega} f\left(\frac{-2k\pi}{\Omega}\right)\,.$$

Durch die Werte $f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right)$ sind also alle FOURIER-Koeffizienten von g bestimmt, damit auch (fast überall) die Funktion $g(\omega)$, und damit auch die Funktion $\widehat{f}(\omega)$, die im Intervall $[\omega_1, \omega_2)$ mit $g(\omega)$ übereinstimmt und außerhalb (außer eventuell im Punkte ω_2) verschwindet. Damit ist auch $f(t) = \check{\widehat{f}}(t)$ fast überall durch diese Werte bestimmt. ■

HARRY NYQUIST (1889–1976) wurde in Schweden geboren, arbeitete aber ab Anfang der zwanziger Jahre bei den Bell Labaratories; das Bild zeigt ihn um 1960 mit seinen dortigen Kollegen JOHN PIERCE *(links)* und RUDOLF KOMPFNER *(Mitte).* Seine Arbeit von 1924 über die Übertragungsgeschwindigkeit von Telegraphen gilt als eine der Begründungen der Informationstheorie. Den Abtastsatz, den CAUCHY bereits 1841 postuliert hatte, bewies er 1928. Weitere wichtige Arbeiten befassen sich mit der quantitativen Erforschung des thermischen Rauschens und der Stabilität von Verstärkern.

Bei praktischen Anwendungen dieses Satzes wird $f(t)$ im allgemeinen eine reelle Funktion sein; dann verschwindet

$$\begin{aligned}\widehat{f}(-\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(-\omega)t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(t)e^{-i\omega t}}\,dt \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt} = \overline{\widehat{f}(\omega)}\end{aligned}$$

genau dann, wenn auch $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet. Daher sollte man in diesem Fall das Intervall, außerhalb dessen $\widehat{f}(\omega)$ verschwindet, symmetrisch wählen, also von der Form

$$(-\omega_0, \omega_0)\,.$$

Die Zahl ω_0 wird in diesem Zusammenhang meist als *Bandbreite* bezeichnet. In diesem Fall ist $\Omega = 2\omega_0$, zur Rekonstruktion der Funktion f brauchen wir also die Funktionswerte

$$f\left(\frac{2k\pi}{\Omega}\right) = f\left(\frac{k\pi}{\omega_0}\right) \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Ein Signal der Bandbreite ω_0 muß also mit einer Frequenz von mindestens $2\omega_0$ abgetastet werden, damit man es rekonstruieren kann.

Bekanntestes Beispiel hierfür sind Musik-CDs: Praktisch niemand kann Töne mit Frequenzen von mehr als 20kHz hören; für Aufnahmen auf CD wird 44 100 Mal pro Sekunde der Schalldruck gemessen und gespeichert, für Signale die nicht allzuweit oberhalb von 20kHz abgeschnitten werden, ist also eine perfekte Rekonstruktion möglich. (Der relativ große Sicherheitsabstand zwischen 20kHz und der Hälfte von 44,1kHz kommt daher, daß die Tiefpaßfilterung auf ein Analogsignal angewandt werden muß, und da ist kein perfektes Abschneiden möglich.)

Auch in der Computergraphik spielt der Satz von NYQUIST eine wichtige Rolle, denn Pixelgraphik ist schließlich nichts anderes als die (zweidimensionale) diskrete Abtastung eines kontinuierlichen Bilds. Falls das Bild zu hochfrequente Anteile enthält, entstehen sogenannte *alias-Effekte,* da das Auge diese Anteile anhand des Pixelbilds als

niedrigerfrequente Strukturen mit gleichen Abtastwerten interpretiert. Vor der Abtastung muß das Bild daher tiefpaßgefiltert werden; da die Funktion $\frac{\sin ax}{ax}$, die FOURIER-Transformierte des Rechteckimpulses, einigermaßen schnell abfällt, wendet man dazu meist das Lemma aus dem letzten Abschnitt an und faltet mit einer geeigneten solchen Funktion. Falls das Ursprungsbild auch schon als (höher aufgelöste) Pixelqraphik gegeben war, wird die Faltung hier einfach zu einer Summation über nicht garzu viele Nachbarpixel, was sehr effizient durchgeführt werden kann.

§2: Gewöhnliche Differentialgleichungen

Differentialgleichungssysteme sind so ziemlich *das* wichtigste mathematischen Hilfsmittel der Naturwissenschaften und der Technik. Die dahinterstehende Grundidee ist einfach: Man kann zwar nur selten *a priori* sagen, wie sich ein System über einen längeren Zeitraum hinweg entwickeln wird, aber man hat oft aufgrund von Naturgesetzen eine klare Vorstellung über die Zustandsänderung *im nächsten Augenblick,* d.h. also über den Wert der zeitlichen Ableitung der Zustandsgrößen in Abhängigkeit vom gegenwärtigen Zustand des Systems. Ein einfaches Beispiel hierfür liefert das zweite NEWTONsche Gesetz, wonach die zeitliche Ableitung des Impuls eines Teilchens gleich der auf das Teilchen wirkenden Kraft ist.

Beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, das wahrscheinlich den meisten schon aus der Schule bekannt: Ein in die Luft geworfener Gegenstand bewegt sich unter gewissen Bedingungen näherungsweise auf einer parabelförmigen Bahn. Wir wollen diese etwas vage Aussage präzisieren und mathematisch herleiten.

Es gibt viele Wurftechniken, und nur wenige davon können auf einfache Weise durch ein mathematisches Modell beschrieben werden; wir ignorieren daher den genauen Vorgang des Abwurfs und gehen davon aus, daß der Gegenstand *irgendwie* eine Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ erreicht hat im Abwurfpunkt mit Koordinaten (x_0, y_0, z_0); den Zeitpunkt des Abwurfs bezeichnen wir mit t_0.

Als nächstes nehmen wir an, daß wir den Luftwiderstand vernachlässigen können, eine Annahme, die beim Kugelstoßen kaum zu Fehlern führt, die aber beispielsweise für einen Fallschirmspringer (auch mit geschlossenem Fallschirm) oder einen Papierflieger völlig unrealistisch ist. Als nächstes wollen wir auch noch annehmen, daß wir nur relativ geringe Wurfhöhen erreichen, so daß die Erdanziehung als konstant angenommen werden kann.

Die Bewegung des Gegenstandes wird dann durch zwei Naturgesetze bestimmt: Das Gravitationsgesetz beschreibt den Effekt der Erdanziehung, und das zweite NEWTONsche Gesetz sagt uns, wie sich diese Kraft auf die Bewegung des Gegenstands auswirkt. Die Gravitation können wir aufgrund der gemachten Annahmen als konstant annehmen, d.h. auf einen Körper der Masse m wirkt die Kraft gm, wobei $g \approx 9{,}8\, m/s^2$ die Gravitationsbeschleunigung an der Erdoberfläche ist; bei „üblicher" Ausrichtung des Koordinatensystems wirkt sie in Richtung der negativen z-Achse. Diese Gravitationskraft ist nach dem zweiten NEWTONschen Gesetz gleich der Ableitung des Impulses nach der Zeit; wenn wir die Masse m als konstant voraussetzen, ist das also gleich m mal der Ableitung der Geschwindigkeit oder m mal der zweiten Ableitung des Orts. Wir haben somit das Differentialgleichungssystem

$$\ddot{x}(t) = 0, \quad \ddot{y}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \ddot{z}(t) = -g\,.$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wann immer $x(t)$ und $y(t)$ lineare Funktionen von t sind und $z(t)$ eine quadratische Funktion mit führendem Koeffizienten $-g$. Die sechs noch fehlenden Koeffizienten dieser drei Polynomfunktionen geben uns die Anfangsbedingungen: Zum Zeitpunkt $t = t_0$ ist

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0 \quad \text{und} \quad z(t_0) = z_0\,,$$

und die Geschwindigkeit ist $\vec{v}$, d.h.

$$\dot{x}(t_0) = v_1, \quad \dot{y}(t_0) = v_2 \quad \text{und} \quad \dot{z}(t_0) = v_3\,.$$

Also ist

$$x(t) = v_1(t - t_0) + x_0, \quad y(t) = v_2(t - t_0) + y_0$$

und

$$z(t) = -g(t - t_0)^2 + v_3(t - t_0) + z_0\,.$$

Diese Gleichungen beschreiben in der Tat fast immer eine Parabel: Falls wir die x-Achse des Koordinatensystems so wählen, daß die Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$ in der (x, z)-Ebene liegt, ist $v_2 = 0$. Falls auch v_1 verschwindet, falls wir den Gegenstand also senkrecht nach oben (oder gar unten) werfen, sind $x(t) = x_0$ und $y(t) = y_0$ konstant und nur

$$z(t) = -g(t - t_0)^2 + v_3(t - t_0) + z_0$$

hängt von der Zeit ab. Andernfalls können wir durch v_1 dividieren; wir erhalten

$$t - t_0 = \frac{x(t) - x_0}{v_1} \quad \text{und} \quad z(t) = \frac{-g}{v_1}\big(x(t) - x_0\big)^2 + \frac{v_3}{v_1}\big(x(t) - x_0\big) + z_0\,,$$

die Punkte $\big(x(t), z(t)\big)$ liegen also in der Tat auf einer Parabel.

Das gerade durchgerechnete Beispiel war insofern untypisch für Differentialgleichungen, als auf den rechten Seite der Gleichungen nur Konstanten standen; üblicherweise wird man dort Funktionen erwarten, die nicht nur von t abhängen (so daß man einfach integrieren kann), sondern auch noch von den gesuchten Funktionen. Beim radioaktiven Zerfall etwa ist die pro (kleiner) Zeiteinheit zerfallende Masse proportional zur noch vorhandenen Masse, es gibt also eine Konstante $\lambda > 0$, die sogenannte Zerfallskonstante, so daß die zum Zeitpunkt t vorhandene Masse $m(t)$ der Gleichung

$$\dot{m}(t) = -\lambda m(t)$$

genügt – zumindest, wenn diese Masse hinreichend groß ist. Im atomaren Bereich muß man auch statistische Effekte berücksichtigen, aber ab etwa 10^10 Atomen können die für alle praktischen Fälle vernachlässigt werden.

Wir kennen bereits eine Funktion, die sich so verhält, wie es die obige Differentialgleichung angibt, nämlich die Exponentialfunktion $e^{-\lambda t}$, und natürlich entspricht auch für jedes konstante Vielfache dieser Funktion die Differentiation einfach der Multiplikation mit $-\lambda$. Das sind dann aber bereits alle Funktionen mit dieser Eigenschaft, denn der Quotient

$$q(t) = \frac{m(t)}{e^{-\lambda t}} = m(t) \cdot e^{\lambda t}$$

einer Lösungsfunktion und der Funktion $e^{-\lambda t}$ hat die Ableitung

$$\dot{q}(t) = \dot{m}(t) \cdot e^{\lambda t} + m(t) \cdot \lambda e^{\lambda t} = -\lambda m(t) \cdot e^{\lambda t} + \lambda m(t) \cdot e^{\lambda t} = 0\,,$$

ist also gleich einer Konstanten c, so daß

$$m(t) = c \cdot e^{-\lambda t}$$

ist. Indem wir $t = 0$ setzen, sehen wir, daß die Konstante $c = m(0)$ gleich der zum Zeitpunkt 0 vorhandenen Masse ist; falls wir stattdessen die Masse $m_0 = m(t_0)$ zu einem anderen Zeitpunkt t_0 kennen, können wir analog zum obigen Beispiel auch schreiben

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda(t-t_0)} = (m_0 e^{\lambda t_0}) \cdot e^{-\lambda t}\,.$$

Allgemein sei ein System beschrieben durch n zeitlich veränderliche Größen $y_1(t), \ldots, y_n(t)$; unter einem System von Differentialgleichungen oder kurz einer Differentialgleichung verstehen wir eine Vorschrift, die die zeitlichen Ableitungen $\dot{y}_1(t), \ldots, \dot{y}_n(t)$ aus den Funktionswerten berechnet:

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1(t) &= f_1\bigl(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\bigr)\\
\dot{y}_2(t) &= f_2\bigl(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\bigr)\\
\vdots\ &\ \vdots\\
\dot{y}_n(t) &= f_n\bigl(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)\bigr)\,.
\end{aligned}$$

Falls die Funktionen f_i nur von $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ abhängen und nicht auch noch direkt von der Zeit t spricht man von einem *autonomen* System. Da Naturgesetze nicht von der Zeit abhängen, hat man es in wissenschaftlich-technischen Anwendungen meist mit autonomen Systemen zu tun; man kann allerdings auch den Einfluß von Umgebungsgrößen in einem zeitabhängigen Term zusammenfassen und so ein nichtautonomes System erhalten.

Falls wir, wie im obigen Beispiel die Werte der beteiligten Funktionen zu einem festen Zeitpunkt $t = t_0$ kennen, reden wir von einem *Anfangswertproblem;* die meisten Anwendungen gewöhnlicher Differentialgleichungen sind Anfangswertprobleme.

Auch Differentialgleichungen, in denen wie dort im Beispiel höhere Ableitungen vorkommen, lassen sich so interpretieren: Wenn wir dort die drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors als neue Funktionen

$$u(t) = \dot{x}(t), \quad v(t) = \dot{y}(t) \quad \text{und} \quad w(t) = \dot{z}(t)$$

eingeführt hätten, wäre das System

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= u(t)\\
\dot{y}(t) &= v(t)\\
\dot{z}(t) &= w(t)\\
\dot{u}(t) &= 0\\
\dot{v}(t) &= 0\\
\dot{w}(t) &= -g
\end{aligned}$$

von obiger Form, und wir hätten für jede der sechs beteiligten Funktionen den Wert an der Stelle $t = t_0$ gekannt.

Ein für die Informationstechnik wichtiger Spezialfall sind Gleichungen der Form

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = b(t)\,,$$

die sogenannten linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Auch diese Gleichungen lassen sich leicht auf die obige Form bringen: Wir betrachten n neue Funktionen

$$y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)$$

mit der Idde, daß sich $y_i(t)$ so verhalten soll wie die i-te Ableitung von $y(t)$. Dann betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}
\dot{y}_0(t) &= y_1(t)\\
\dot{y}_1(t) &= y_2(t)\\
\vdots\ &\ \vdots\\
\dot{y}_{n-2}(t) &= y_{n-1}(t)\\
\dot{y}_{n-1}(t) &= b(t) - a_{n-1}y^{(n-1)}(t) - \cdots - a_1\dot{y}(t) - a_0 y(t)\,.
\end{aligned}$$

Für jede Lösung $y(t)$ der obigen Gleichung ist dann das n-tupel

$$\big(y(t), \dot y(t), \ddot y(t), \dots, y^{n-1}(t)\big)$$

eine Lösung des Systems, und für jede Lösung

$$\big(y_0(t), y_1(t), y_2(t), \dots, y_{n-1}(t)\big)$$

des Differentialgleichungssystems ist $y_0(t)$ eine Lösung der obigen Gleichung. Auch wenn das Differentialgleichungssystem als Anfangswertproblem gegeben ist, läßt sich das leicht in Anfangswerte für die Gleichung höherer Ordung umschreiben: Hier werden die Werte $y(t_0), \dot y(t_0), \dots y^{(n-1}(t_0)$ vorgegeben.

Da diese Gleichungen so wichtig sind, und da der häufigste Ansatz für die Lösung entsprechender Anfangswertprobleme unmittelbar an den vorigen Paragraphen anschließt, wollen wir hiermit beginnen:

a) Die Laplace-Transformation

Im letzten Paragraphen haben wir gesehen, daß die FOURIER-Transformation Ableitungen in Produkte überführt; wenn wir also beide Seiten einer Differentialgleichung

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

FOURIER-transformieren, erhalten wir eine algebraische Gleichung für $\widehat{y}(\omega)$, die im allgemeinen einfacher zu lösen sein sollte als die Differentialgleichung.

Der Haken an der Sache ist, daß die FOURIER-Transformierte in vielen interessanten Fällen wie etwa bei Schwingungen nicht existiert – zumindest nicht als Funktion. Deshalb arbeitet man nur selten mit dieser Methode. Eine leichte Modifikation führt aber häufig ans Ziel:

Das FOURIER-Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

hat Konvergenzprobleme sowohl an der oberen als auch an der unteren Grenze. Bei der Anwendung von Differentialgleichungen geht es meist um die Vorhersage der Zukunft, so daß das Verhalten für $t \to -\infty$ nicht interessiert; wir setzen daher die Funktion f für $t < 0$ auf null.

Für positive t dürfen wir nicht so radikal vorgehen; hier dämpfen wir die Funktion einfach durch eine Exponentialfunktion. Insgesamt betrachten wir also anstelle von $f(t)$ die Funktion

$$g_r(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f(t)e^{-rt} & \text{für } t > 0 \end{cases}.$$

Den Funktionswert an der Stelle 0 legen wir so fest, daß die Funktion dort rechtsseitig stetig ist, d.h.

$$g(0) = \lim_{t\to 0+} f(t)\,,$$

wobei $t \to 0+$ bedeuten soll, daß wir nur Nullfolgen aus positiven Zahlen betrachten. Wir wollen der Einfachheit halber im folgenden annehmen, daß f bereits rechtsseitg stetig ist, so daß wir an der Stelle null einfach den Wert $f(0)$ nehmen können.

Die FOURIER-Transformierte dieser Funktion g_r bezeichnen wir, wenn sie existiert, als LAPLACE-Transformierte von f an der Stelle $s = r + i\omega$, d.h.

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) \underset{\text{def}}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

Für gängige Funktionen f ist $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ ist den meisten Formelsammlungen zu finden; es gibt auch umfangreiche Tabellenwerke, die ausschließlich der LAPLACE-Transformation gewidmet sind. Im allgemeinen wird sie nur für hinreichend große Werte von $r = \mathfrak{Re}\, s$ existieren.

Die Umkehrung der LAPLACE-Transformation folgt aus der inversen FOURIER-Transformation: Da fast überall $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega) = \widehat{g}_r(t)$ ist, ist $g_r(t)$ die inverse FOURIER-Transformierte von $\mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)$; für $t > 0$ ist also fast überall

$$f(t) = e^{rt}g_r(t) = \frac{e^{rt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}\{f(t)\}(r + i\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,.$$

Da die Funktionswerte von f auf der negativen Achse bei der LAPLACE-Transformation ignoriert werden, lassen sie sich natürlich auch nicht aus der LAPLACE-Transformierten rekonstruieren.

Wir betrachten LAPLACE-Transformation in diesem Paragraphen, da sie wie die FOURIER-Transformation die Differentiation in Multiplikation überführt: Nach der Regel über partielle Integration ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\dot f(t)\}(s) &= \int_0^\infty \dot f(t)e^{-st}\,dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\\ &= -f(0) + s\mathcal{L}\{f(t)\}(s)\end{aligned}$$

und damit induktiv

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\dot f(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)\,.$$

Dies ist etwas komplizierter als bei der FOURIER-Transformation, wo wir keine Funktionswerte an der Stelle null berücksichtigen mußten, aber für die Anwendung auf Differentialgleichungen ist das meist ein *Vorteil:*

In der Praxis hat man es fast immer mit Anfangswertproblemen zu tun, wobei man den Anfangszeitpunkt ohne großen Aufwand als Nullpunkt wählen kann. Dann geht es also um die Bestimmung einer Funktion $y(t)$ mit den Eigenschaften, daß

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = b(t)$$

ist und

$$y(0) = y_0, \quad \dot y(0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{n-1}(0) = y_{n-1}\,.$$

Anwendung der LAPLACE-Transformation macht daraus die algebrai-

sche Gleichung

$$\begin{aligned}&s^n\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-1}y_0 - s^{n-2}y_1 - \cdots - y_{(n-1)}\\ +\,&a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - s^{n-2}y_0 - s^{n-3}y_1 - \cdots - y_{(n-2)}\\ &\vdots\\ +\,&a_1s\mathcal{L}\{y(t)\}(s) - y_0\\ +\,&a_0\mathcal{L}\{y(t)\}(s) \qquad = \qquad \mathcal{L}\{b(t)\}(s)\end{aligned}$$

für $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, die man – so die rechte Seite existiert – leicht nach $\mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ auflösen kann. Rücktransformation (meist anhand einer Tabelle) führt dann auf die Lösung $y(t)$ des Anfangswertproblems. Bevor wir dazu Beispiele betrachten, sollten wir zunächst die LAPLACE-Transformierten einiger wichtiger Funktionen kennen.

b) Rechenregeln und Beispiele zur Laplace-Transformation

Die FOURIER-Transformation existiert (als Funktion) weder für reine Schwingungen noch für Polynome, und selbst für e^{-t} gibt es Probleme amunteren Rand des Integrationsbereichts. Wir wollen uns überlegen, daß für alle diese Funktionenklassen die LAPLACE-Transformierte existiert.

Beginnen wir mit $\mathcal{L}\{\sin t\}(s)$. Dieses Integral läßt sich durch partielle Integration relativ leicht ausrechnen, noch einfacher geht es aber, wenn wir die Rechenregeln für die LAPLACE-Transformation der Ableitung anwenden: Da der Cosinus Ableitung des Sinus ist, haben wir einerseits

$$\mathcal{L}\{\cos t\}(s) = s\cdot\mathcal{L}\{\sin t\}(s) - \sin 0 = s\cdot\mathcal{L}\{\sin t\}(s)\,,$$

andererseit ist der Sinus die negative Ableitung des Cosinus und deshalb

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = -\big(s\cdot\mathcal{L}\{\cos t\}(s) - \cos 0\big) = 1 - s\cdot\mathcal{L}\{\cos t\}(s)\,.$$

Also ist

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1 - s^2\cdot\mathcal{L}\{\sin t\}(s) \quad \text{oder} \quad (1+s^2)\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = 1$$

und damit

$$\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \frac{1}{1+s^2}\,.$$