WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

17. Januar 2006

11. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Schreiben Sie eine Prozedur `linmatrix(n, m)`, die für zwei natürliche Zahlen n, m eine $n \times m$-Matrix A_{nm} erzeugt, deren Einträge, zeilenweise angeordnet, die Zahlen von 1 bis nm sind!

b) *ditto* für die Matrix B_{nm}, deren Einträge die Quadrate dieser Zahlen sind!

c) Berechnen Sie die 10×10-Matrix $C = (c_{ij})$ mit Eintrag $c_{ij} = \operatorname{Rang} B_{ij}$!

d) Erklären Sie dieses Ergebnis!

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

Eine Matrix $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ heiße *magisch,* wenn es eine Zahl d gibt derart, daß für jeden Zeilenvektor, jeden Spaltenvektor, die Hauptdiagonale und die Nebendiagonale (rechts oben nach links unten) die Summe der n Einträge gleich d ist.

a) Stellen sie ein lineares Gleichungssystem für die neun Einträge einer 3×3-Matrix auf, das ausdrückt, daß die Matrix magisch ist mit Summe d!

b) Bestimmen Sie für $d = 15$ eine Basis des Lösungsraums!

c) Bestimmen Sie alle magischen 3×3-Matrizen, deren Einträge genau die neun ersten natürlichen Zahlen sind!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Schreiben Sie eine Prozedur `magisch(n)`, die zu einer natürlichen Zahl n eine $(2n+2)\times n^2$-Matrix M_n berechnet derart, daß eine $n \times n$-Matrix $X = (x_{ij})$ genau dann magisch ist mit Summe d, wenn für den Vektor $\vec{x} = (x_{11}, x_{12}, \dots x_{1n}, x_{21}, \dots, x_{2n}, x_{31}, \dots x_{nn}) \in \mathbb{Q}^{n^2}$ das lineare Gleichungssystem $M_n\vec{x} = \vec{d}$ erfüllt ist, wobei $\vec{d} \in \mathbb{Q}^{2n+2}$ jener Vektor ist, dessen sämtliche Komponenten gleich d sind.

b) Berechnen Sie für $n \le 10$ die Dimension des Lösungsraums. Wie hängt diese von d ab?

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *positiv definit,* wenn alle ihre Eigenwerte positiv sind, *negativ definit,* wenn alle Eigenwerte negativ sind, *positiv semidefinit,* wenn alle Eigenwerte nichtnegativ und *negativ semidefinit,* wenn alle Eigenwerte nichtpositiv sind. Andernfalls heißt die Matrix *indefinit.* (Zur Erinnerung: Die Eigenwerte einer reellen symmetrischen Matrix sind alle reell, und die algebraische Vielfachheit ist stets gleich der geometrischen.)

a) Schreiben Sie eine Prozedur `definit(M)`, die für eine symmetrischen Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ entscheidet, welche dieser Eigenschaften M hat, und testen Sie diese mit mindestens einem Beispiel für jeden der fünf Fälle!

b) Zeigen Sie: Zu jeder positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt es genau eine positiv definite Matrix $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so daß $W^2 = A$ ist.

c) Schreiben Sie eine Prozedur, die W berechnet!

d) Bestimmen Sie W für $A = \begin{pmatrix} -13 & -8 & 14 \\ 5 & 9 & -5 \\ -17 & -8 & 18 \end{pmatrix}$!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 24. Januar 2006, um 12.00 Uhr