Wolfgang K. Seiler
Tel. 2515

A5, C201

13. Dezember 2005

8. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

Nach H. Vogel kann eine Sonnenblume folgendermaßen modelliert werden: Das i-te Korn steht an der Stelle mit Polarkoordinaten $r_i = c\sqrt{i}$ und $\varphi_i = i\varphi$ mit $\varphi = 2\pi/\tau^2$, $\tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

a) Zeichnen Sie nach diesem Algorithmus eine Sonnenblume mit 610 Kernen, indem Sie die einzelnen Kerne jeweils mit einem `disk`-Kommando erzeugen!

b) Wiederholen Sie die Konstruktion, indem Sie nur eine `disk` erzeugen und diese mit `translate`-Kommandos an die richtigen Stellen bringen.

c) Vergleichen Sie die Laufzeiten von *a)* und *b)*. Erklärung? (Ein Vergleich ist nur sinnvoll, wenn jede Zeichnungen direkt nach einem `restart`-Kommando angefertigt wird.)

d) Verändern Sie φ um ein Prozent nach oben *bzw.* unten. Wie ändert sich das Bild?

e) Zeichnen Sie eine weitere Sonnenblume mit nur 144 Kernen und schreiben Sie in jeden Kern dessen Nummer i!

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Bauen Sie einen Turm aus fünf jeweils einfarbigen Bauklötzen, die die Form der fünf platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder) haben. Dabei sollte jeweils eine Seitenfläche des nächsthöheren Bausteins ganz auf einer Seitenfläche des darunterliegenden aufliegen. Wählen Sie die Reihenfolge der Bausteine so, daß dies gut klappt.

b) Beleuchten Sie den Turm so, daß die Körper auch bei Darstellung im Stil `patchnogrid` gut erkennbar sind!
Hinweis: Alle fünf platonischen Körper sind im Paket `geom3d` bereitgestellt. Dort gibt es auch Funktionen, die zu einem Polyeder den Radius der Inkugel und ähnliches berechnen können. Polyeder aus `geom3d` werden mit `draw` gezeichnet. Auch in `plottools` sind die platonischen Körper vorhanden, allerdings ohne solche Funktionen.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)

a) Leiten Sie aus der Zerlegung von $X^p - X$ über $\mathbb{F}_p$ die Wilsonsche Kongruenz her: Für eine Primzahl p ist $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$.

b) Zeigen Sie, daß die zehnte Fermat-Zahl $F_{10} = 2^{2^{10}} + 1$ nicht prim ist!

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für eine Primzahl $p \equiv 3 \bmod 4$ und ein Element $a \in \mathbb{F}_p$ hat $x = a^{(p+1)/4}$ entweder a oder $-a$ als Quadrat.

b) Lösen Sie die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ in $\mathbb{F}_p$ für $p = 10^{20} + 39$ ohne Verwendung eines der vielen `solve`-Kommandos von Maple! Dokumentieren Sie dabei Ihren Rechengang ähnlich wie in Aufgabe 1 des vorigen Übungsblatts!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 20. Dezember 2005, um 12.00 Uhr