Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

6. Dezember 2005

7. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (*5 Punkte*)

a) Schreiben Sie eine Prozedur `QG(a, b, c)`, die für beliebige rationale Argumente $a, b, c \in \mathbb{Q}$ die Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ herleitet. Dabei soll zu jeder Umformung wie quadratische Ergänzung, Division der Gleichung durch eine Zahl, ... kommentiert werden durch eine Erläuterung, die den expliziten Zahlenwert enthält; außerdem soll angegeben werden, aus wie vielen Zahlen welcher Art (rational, reell, komplex) die Lösungsmenge besteht. Die Prozedur soll auch dann funktionieren, wenn eine, zwei oder alle drei der Zahlen a, b, c verschwinden. Umgeformte Gleichungen sollen zentriert und zweidimensional ausgedruckt werden, Erläuterungen linksbündig und linear.

b) Finden Sie geeignete Testdaten, so daß alle Fälle vorkommen, und wenden Sie Ihre Prozedur darauf an!

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)

a) Zeigen Sie: Für zwei Polynome $f, g \in R[X]$ über dem Integritätsbereich R gibt es Polynome $\alpha, \beta \in R[X]$ derart, daß $\alpha f + \beta g = \mathrm{Res}_X(f, g)$ ist.

b) Berechnen Sie α und β für $f = X^2 + XY + Y^2$ und $g = X^4 + X^3Y + X^2Y^2 + xY^3 + Y^4$ über $R = k[Y]$!

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Die parametrische Kurve C sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\dfrac{t^4-1}{t^4+1}, \dfrac{t^4+t^3+t^2+t+1}{t^4+1}\right) \end{cases}$.

a) Zeichnen Sie C! (Wie das geht, finden Sie in der online-Hilfe unter `plot/parametric`.)

b) Der Tangentenvektor an C im Punkt $\gamma(t)$ ist die Ableitung von $\gamma(t)$ nach t. Zeichnen Sie C zusammen mit den Tangentenvektoren für die Parameterwerte $t = -5, -4, \dots, 4, 5$!

c) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X, Y]$, dessen Nullstellenmenge C ist!

d) Zeichnen Sie C als Nullstellenmenge mit einem `implicitplot`-Kommando!

Aufgabe 4: (*5 Punkte*)

a) α sei Nullstelle des Polynoms $f \in \mathbb{Z}[X]$ und β sei Nullstelle von $g \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie: $\mathrm{Res}_X\big(f(X), g(Z - X)\big)$ verschwindet für $\alpha + \beta$, und $\mathrm{Res}_X\big(f(X), g(Z/X)X^{\deg g}\big)$ für $\alpha \cdot \beta$.

b) Welches Polynom verschwindet an der Stelle $\alpha/beta$?

c) Finden Sie ein Polynom $h \in \mathbb{Z}(X)$, das $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ als Nullstelle hat!

d) Bestimmen Sie ohne Hilfe von Maple die sämtlichen Nullstellen von h!

Abgabe bis zum Dienstag, dem 13. Dezember 2005, um 12.00 Uhr