WOLFGANG K. SEILER
*Tel.* 2515

A5, C201

*6. Dezember 2005*

# 7. Übungsblatt Computeralgebra

**Aufgabe 1:** (*5 Punkte*)

*a)* Schreiben Sie eine Prozedur `QG(a, b, c)`, die für beliebige rationale Argumente $a, b, c \in \mathbb{Q}$ die Lösung der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ herleitet. Dabei soll zu jeder Umformung wie quadratische Ergänzung, Division der Gleichung durch eine Zahl, ... kommentiert werden durch eine Erläuterung, die den expliziten Zahlenwert enthält; außerdem soll angegeben werden, aus wie vielen Zahlen welcher Art (rational, reell, komplex) die Lösungsmenge besteht. Die Prozedur soll auch dann funktionieren, wenn eine, zwei oder alle drei der Zahlen $a, b, c$ verschwinden. Umgeformte Gleichungen sollen zentriert und zweidimensional ausgedruckt werden, Erläuterungen linksbündig und linear.

*b)* Finden Sie geeignete Testdaten, so daß alle Fälle vorkommen, und wenden Sie Ihre Prozedur darauf an!

**Aufgabe 2:** (*5 Punkte*)

*a)* Zeigen Sie: Für zwei Polynome $f, g \in R[X]$ über dem Integritätsbereich $R$ gibt es Polynome $\alpha, \beta \in R[X]$ derart, daß $\alpha f + \beta g = \mathrm{Res}_X(f, g)$ ist.

*b)* Berechnen Sie $\alpha$ und $\beta$ für $f = X^2 + XY + Y^2$ und $g = X^4 + X^3Y + X^2Y^2 + xY^3 + Y^4$ über $R = k[Y]$!

**Aufgabe 3:** (*5 Punkte*)

Die parametrische Kurve $C$ sei gegeben durch $\gamma\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \left(\dfrac{t^4-1}{t^4+1}, \dfrac{t^4+t^3+t^2+t+1}{t^4+1}\right) \end{cases}$.

*a)* Zeichnen Sie $C$! (Wie das geht, finden Sie in der online-Hilfe unter `plot/parametric`.)

*b)* Der Tangentenvektor an $C$ im Punkt $\gamma(t)$ ist die Ableitung von $\gamma(t)$ nach $t$. Zeichnen Sie $C$ zusammen mit den Tangentenvektoren für die Parameterwerte $t = -5, -4, \dots, 4, 5$!

*c)* Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{R}[X, Y]$, dessen Nullstellenmenge $C$ ist!

*d)* Zeichnen Sie $C$ als Nullstellenmenge mit einem `implicitplot`-Kommando!

**Aufgabe 4:** (*5 Punkte*)

*a)* $\alpha$ sei Nullstelle des Polynoms $f \in \mathbb{Z}[X]$ und $\beta$ sei Nullstelle von $g \in \mathbb{Z}[X]$. Zeigen Sie: $\mathrm{Res}_X\bigl(f(X), g(Z-X)\bigr)$ verschwindet für $\alpha + \beta$, und $\mathrm{Res}_X\bigl(f(X), g(Z/X)X^{\deg g}\bigr)$ für $\alpha \cdot \beta$.

*b)* Welches Polynom verschwindet an der Stelle $\alpha/beta$?

*c)* Finden Sie ein Polynom $h \in \mathbb{Z}(X)$, das $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ als Nullstelle hat!

*d)* Bestimmen Sie ohne Hilfe von Maple die sämtlichen Nullstellen von $h$!

**Abgabe** bis zum Dienstag, dem 13. Dezember 2005, um 12.00 Uhr