Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

29. November 2005

6. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: *(5 Punkte)*

a) Wie viele Paare (f, g) von Polynomen $f, g \in \mathbb{F}_5[X]$ vom Grad zwei gibt es, für die $\operatorname{Res}_X(f, g)$ verschwindet? Wie viele Prozent aller Paare sind dies?

b) In wieviel Prozent dieser Fälle verschwindet $\operatorname{Res}_X(f, g)$ auch dann noch, wenn man f, g als Elemente von $\mathbb{Z}[X]$ auffaßt mit Koeffizienten $0, 1, 2, 3, 4$?

Aufgabe 2: *(5 Punkte)*

a) Erzeugen Sie 10 000 zufällige Paare (f, g) von Polynomen zehnten Grades aus $\mathbb{F}_{997}[X]$, und zählen Sie, in wieviel Prozent aller Fälle f und g teilerfremd sind!

b) Erzeugen Sie 10 000 zufällige Paare (a, b) natürlicher Zahlen (a, b) mit $a, b \leq 10^{12}$ und zählen Sie, in wieviel Prozent aller Fälle a und b teilerfremd sind!

c) Man kann zeigen, daß zwei zufällig gewählte ganze Zahlen a, b mit Wahrscheinlichkeit $x : \pi^2$ teilerfremd sind, wobei x eine natürliche Zahl ist. Schätzen Sie auf Grund Ihrer Ergebnisse aus *b)* den Wert von x!

Aufgabe 3: *(4 Punkte)*

a) Für welche Primzahlen p haben die Polynome $\sum_{i=0}^{10} x^i y^{10-i}$ und $\sum_{i=0}^{10} i^2 x^i y^{10-i}$ einen echten gemeinsamen Teiler?

b) Was ist in diesen Fällen der größte gemeinsame Teiler modulo p?

Aufgabe 4: *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie ohne `solve` und ähnliche Kommandos alle Lösungen des Gleichungssystems

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 0 \quad \text{und} \quad x^4 + x^3y + xy^3 + y^4 + 1 = 0$$

sowohl exakt wie auch als Gleitkommazahlen!

Hinweis: Maple kann nicht sonderlich gut mit Wurzeln aus komplexen Zahlen umgehen. Es empfiehlt sich daher, alle Zwischenergebnisse mit `evalc` nach Real- und Imaginärteil zu trennen.

Abgabe bis zum Dienstag, dem 6. Dezember 2005, um 12.00 Uhr