

8. November 2005

3. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (6 Punkte)

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$x_0 = x_1 = x_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_n = 4x_{n-1} + 11x_{n-2} - 30x_{n-3} \quad \text{für } n \geq 3.$$

- Berechnen Sie über diese Rekursionsvorschrift die Liste der Werte x_0, \dots, x_{20} !
- Zeichnen Sie einen Kantenzug mit Eckpunkten $(n, \log |x_n|)$ für $n = 0, \dots, 20$!
- Erklären Sie das Aussehen dieses Kantenzugs!
- Finden Sie eine geschlossene Formel für x_n !

Aufgabe 2: (4 Punkte)

- Schreiben Sie eine Maple-Prozedur `bezout(f, g)`, die für zwei Polynome $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ eine Liste $[h, \alpha, \beta]$ von Polynomen aus $\mathbb{Q}[X]$ berechnet derart, daß $h = \text{ggT}(f, g) = \alpha f + \beta g$ ist!
- Wenden Sie diese Prozedur an auf die beiden Polynome

$$x^8 + 5x^7 + 7x^6 - 3x^5 + 4x^4 + 17x^3 - 2x^2 - 6x + 3 \quad \text{und} \quad x^8 + 6x^7 + 3x^6 + x^5 + 10x^4 + 8x^3 + 2x^2 + 9x + 8$$

aus Aufgabe 4 des zweiten Übungsblatts, und bestimmen Sie α, β so, daß $\alpha f + \beta g$ den ggT in seiner einfachsten Form darstellt!

Aufgabe 3: (6 Punkte)

- Bestimmen Sie alle Primzahlen p derart, daß die beiden Polynome aus der vorigen Aufgabe über \mathbb{F}_p mindestens zwei gemeinsame Nullstellen haben!
- Berechnen Sie für jede dieser Primzahlen die sämtlichen gemeinsamen Nullstellen der beiden Polynome *ohne* Verwendung von Kommandos wie `factor` oder `solve` und deren Varianten! (`gcd` und seine Varianten sind erlaubt!)
- Zeigen Sie: Der Hauptnenner der sämtlichen Koeffizienten der Polynome α, β aus Aufgabe 2b) hat als Primteiler genau die in a) berechneten Primzahlen.
- Erklären Sie dies!

Aufgabe 4: (4 Punkte)

- Finden sie eine natürliche Zahl z mit $12z \equiv 1 \pmod{2005}$!
- Für eine 60-stellige Zahl $x \in \mathbb{N}$ ist bekannt, daß

$$\begin{aligned} x &\equiv 59561520995519639382 \pmod{10^{20} + 753}, \\ x &\equiv 61184264701017556803 \pmod{10^{20} + 757} \quad \text{und} \\ x &\equiv 98573972413140333434 \pmod{10^{20} + 763}. \end{aligned}$$

Berechnen Sie x ohne Verwendung des `chrem`-Kommandos vom Maple!