

25. Oktober 2005

1. Übungsblatt Computeralgebra

Aufgabe 1: (5 Punkte)

- a) Die Folge (x_n) sei definiert durch $x_0 = 0,8$ und $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n)$. Berechnen Sie mit Dezimalzahlen d -stelliger Genauigkeit für $d = 5, 6, \dots, 40$ den Wert von x_{100} , und drucken Sie für jeden Wert von d eine Zeile, die sowohl d als auch den berechneten Wert für x_{100} enthält!
- b) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) = 4x(1 - x)$. Zeichnen Sie (in aufeinanderfolgenden Frames) die Graphen von $f, f \circ f, f \circ f \circ f$ usw. bis zur zehnfachen Iteration von f über dem Intervall $[0, 1]$!
- Hinweis:* Mit ?atsign bekommen Sie eine Hilfeseite, die Ihnen helfen kann, Schreibarbeit zu sparen und ihre Anweisung effizienter zu programmieren. Gehen Sie ansonsten bei Ihren ersten Versuchen lieber nur bis zur etwa fünften Iteration.
- c) Erklären Sie das Ergebnis aus a) mit Hilfe der Zeichnungen aus b)!

Aufgabe 2: (5 Punkte)

- a) Die HILBERT-Matrix $H_n \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ hat an der Stelle (i, j) den Eintrag $\frac{1}{i+j-1}$. Berechnen Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $H_{10}\vec{x} = \vec{b}$, wobei sämtliche Komponenten der rechten Seite \vec{b} gleich eins sind!
- b) Ersetzen Sie nun die rechte Seite durch einen Vektor, dessen sämtliche Komponenten 1,0 sind, und berechnen Sie dreimal die Lösung dieses Gleichungssystems $H_{10}\vec{x} = \vec{b}$!
- c) Vergleichen Sie die Ergebnisse untereinander und mit denen aus a), und versuchen Sie, die Unterschiede zu erklären!

Aufgabe 3: (5 Punkte)

Bei der Beugung am Spalt beobachtet man auf dem Schirm eine Intensitätsverteilung, die durch die Funktion $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ beschrieben wird.

- a) Zeigen Sie: Die Maxima dieser Funktion liegen genau bei den $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\tan x_n = x_n$!
- b) Zeigen Sie: Zwischen zwei aufeinanderfolgenden positiven Maxima x_n liegt stets ein ganzzahliges Vielfaches von π !
- c) Berechnen Sie die zwanzig kleinsten positiven Werte x_n näherungsweise!
- d) Um wieviel Prozent unterscheiden sich die x_n von ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$?

Aufgabe 4: (5 Punkte)

- a) Zeichnen Sie den Graphen von $f_a(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - a$ für $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{9}{2}$ für eine Folge von Werten von a zwischen $-\frac{3}{2}$ und $\frac{3}{2}$!
- b) Bestimmen Sie für $k = 0, 1, 2, 3, 4$ die Menge $M_k = \{a \in \mathbb{R} \mid f_a \text{ hat } k \text{ reelle Nullstellen}\}$!