WOLFGANG K. SEILER A5, C201
Tel. 2515

31. August 2015

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren Sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt (x, y) das Minimum von x und y zuordnet, ist stetig.

Lösung: *Richtig:* Auf der Teilmenge mit $x \geq y$ ist dies die Projektion $(x, y) \mapsto y$, auf der mit $x \leq y$ die Projektion $(x, y) \mapsto x$. Beide sind stetig, und im Durchschnitt der beiden Bereiche, also auf der Geraden $y = x$, stimmen beide überein.
Alternativ: $\min(x, y) = \frac{1}{2}\big((x+y-|x-y|\big)$ ist stetig als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen.

2) Richtig oder falsch: Wenn die HESSE-Matrix der mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Nullmatrix ist, ist f linear.

Lösung: *Richtig,* denn die Zeilen der HESSE-Matrix sind die Gradienten der partiellen Ableitungen von f nach den verschiedenen Variablen. Da diese allesamt verschwinden, sind alle partiellen Ableitungen konstant, f selbst also linear.

3) Richtig oder falsch: Die Menge $M = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x| \leq 1\big\}$ ist kompakt.

Lösung: *Falsch;* da M beispielsweise alle Punkte $(0, y)$ für $y \in \mathbb{R}$ enthält, ist M nicht beschränkt, also auch nicht kompakt.

4) Richtig oder falsch: Jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist beschränkt.

Lösung: *Richtig:* Ist K der kompakte Träger, so nimmt f als stetige Funktion auf K sowohl sein Maximum M als auch sein Minimum m an. Da f auf ganz $\mathbb{R}^n$ stetig ist, verschwindet f auf dem Rand von K; also ist $m \leq 0 \leq M$, und damit ist $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

5) Richtig oder falsch: Der Korrelationskoeffizient der zwanzig Datenpaare $\big(x, \cos\frac{x}{10}\big)$ für $x = 1, \ldots, 20$ ist positiv.

Lösung: *Falsch:* Da der Kosinus zwischen null und π monoton fällt, ist $\cos\frac{x}{10}$ für im Intervall $[0, 20]$ eine monoton fallende Funktion von x; daher ist der Korrelationskoeffizient negativ. (Er ist ungefähr gleich -0,9876932723.)

6) Richtig oder falsch: $f(y) = \int\limits_{-2}^{3} \big(y^2 e^{x^2+y^2} + \sin\sqrt[3]{x^4+x^2+1}\,\big)\,dx$ ist differenzierbar.

Lösung: *Richtig,* denn der Integrand ist stetig und partiell nach y differenzierbar.

Aufgabe 1: (*8 Punkte*)

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = 1 + e^{x^2-y}\sin(x^2+y)$!

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten und die aus der Analysis I bekannten TAYLOR-Reihen

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \cdots \quad \text{und} \quad \sin w = w - \frac{w^3}{6} + \frac{w^5}{120} - \cdots$$

benutzen. Offensichtlich müssen nur Potenzen bis z^4 und w^4 betrachten, da alle höheren für $z = x^2 - y^2$ und $w = x + y^2$ nur Terme vom Grad mindestens fünf in x, y liefern. Wenn wir $(x^2-y)^4$ nach der binomischen Formel ausrechnen, hat nur der letzte Summand y^4 einen Grad kleiner oder gleich vier; in

$$(x^2-y)^3 = x^6 - 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$$

gilt dies für die letzten beiden Summanden. Somit ist

$$\begin{aligned} e^{x^2-y} &= 1 + x^2 - y + \frac{x^4 - 2x^2y + y^2}{2} + \frac{3x^2y^2 - y^3}{6} + \frac{y^4}{24} + \textit{höhere Terme} \\ &= 1 - y + x^2 + \frac{y^2}{2} - x^2y - \frac{y^3}{6} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \textit{höhere Terme} \\ &. \end{aligned}$$

Entsprechend müssen wir in $(x^2+y)^3 = x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$ nur die letzten beiden Term berücksichtigen; daher ist

$$\sin(x^2+y) = y + x^2 - \frac{y^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} + \textit{höhere Terme}\,.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 1 + y + x^2 - \frac{y^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} - y^2 - x^2y + \frac{y^4}{6} + x^2y + x^4 + \frac{y^3}{2} + \frac{x^2y^2}{2} - x^2y^2 - \frac{y^4}{6} \\ &\quad + \textit{höhere Terme} \\ &= 1 + y + x^2 - y^2 + \frac{y^3}{3} + x^4 - x^2y^2 + \textit{höhere Terme}\,; \end{aligned}$$

das gesuchte TAYLOR-Polynom ist also $1 + y + x^2 - y^2 - \frac{1}{3}y^3 + x^4 - x^2y^2$.

b) Lesen Sie daraus Gradient und HESSE-Matrix von f im Nullpunkt ab!

Lösung: Da f mindestens zweimal (tatsächlich sogar beliebig oft) stetig differenzierbar ist, ist die HESSE-Matrix symmetrisch; ist $\operatorname{grad} f(0,0) = \binom{a}{b}$ und $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} c & d \\ d & e \end{pmatrix}$, so ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades um $(0,0)$

$$f(0,0) + \left\langle \operatorname{grad} f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x\ y) H_f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(0,0) + ax + by + \tfrac{1}{2}cx^2 + dxy + \tfrac{1}{2}ey^2\,.$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$, $d = 0$ und $e = -2$ ist. Somit ist

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\,.$$

c) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $g = x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$ um den Punkt $(0,2)$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 4x^3+6x^2y+6xy^2+2y^3 & \frac{\partial g}{\partial x}(0,2) &= 16\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= 2x^3+6x^2y+6xy^2+4y^3 & \frac{\partial g}{\partial y}(0,2) &= 32\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 12x^2+12xy+6y^2 & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0,2) &= 24\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} &= 6x^2+12xy+6y^2 & \frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(0,2) = \frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(0,2) &= 24\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 6x^2+12xy+12y^2 & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0,2) &= 48
\end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{grad} g(0,2) = \begin{pmatrix}16\\32\end{pmatrix}$ und $H_g(0,2) = \begin{pmatrix}24 & 24\\ 24 & 48\end{pmatrix}$. Wegen $g(0,2) = 16$ erhalten wir als TAYLOR-Polynom zweiten Grades $16+16h+32k+12h^2+24hk+24k^2$.

Alternativ: Berechne die Terme vom Grad höchstens zwei in $g(h, 2+k)$:

$$\begin{aligned}
(2+k)^4 &= 16+32k+24k^2+\textit{höhere Terme}\\
h(2+k)^3 &= 8h+12hk+\textit{höhere Terme}\\
h^2(2+k)^2 &= 4h^2+\textit{höhere Terme}
\end{aligned}$$

Somit ist $g(h, 2+k) = 12h^2+16h+24hk+16+32k+24k^2+\textit{höhere Terme}$, und wir erhalten (natürlich) das gleiche TAYLOR-Polynom wie oben.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = xe^x + y^2e^{-x}$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: f ist beliebig oft differenzierbar, also können wir mit Gradient und HESSE-Matrix arbeiten. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= e^x + xe^x - y^2e^{-x}\\
f_y(x,y) &= 2ye^{-x}\\
f_{xx}(x,y) &= 2e^x + xe^x + y^2e^{-x}\\
f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -2ye^{-x}\\
f_{yy}(x,y) &= 2e^{-x}\,.
\end{aligned}$$

Verschwindet der Gradient, so ist insbesondere $f_y(x,y) = 2ye^{-x} = 0$; da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, muß also $y = 0$ sein. Da $f_x(x,0) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$ nur für $x = -1$ verschwindet, verschwindet der Gradient nur im Punkt $(-1,0)$. Dort ist ist die HESSE-Matrix

$$\begin{pmatrix} e^{-1} & 0\\ 0 & 2e\end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix mit lauter positiven Einträgen, also positiv definit; daher hat f im Punkt $(-1,0)$ ein relatives Minimum.

b) Hat f ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

Lösung: Da $f(0,y) = y^2$ unbeschränkt wächst, kann es kein absolutes Maximum geben. Die Funktion ist aber nach unten beschränkt, denn xe^x hat die Ableitung $(1+x)e^x$, die für $x < 1$ negativ und für $x > -1$ positiv ist; also hat diese Funktion ihr absolutes Minimum bei $x = -1$. Der Summand y^2e^{-x} kann nicht negativ werden und verschwindet genau dann, wenn y verschwindet. Daher ist $f(x,y) \ge f(-1,0) = -e^{-1}$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; das relative Minimum ist also ein absolutes.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*
Ein Produkt wird aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

Lösung: Da die Funktion $f(x,y,z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ bei zwei festgehaltenen Variablen eine monoton wachsende Funktion der dritten ist, wird das Maximum beim Einsatz von genau 24 000 Euro erreicht, die Nebenbedingung ist also

$$g(x,y,z) = 80x + 12y + 10z - 24\,000 = 0\,.$$

Das Maximum wird sicher nicht in einem Punkt angenommen, in dem eine der drei Variablen verschwindet, denn dort hat f den Wert Null; wir können also im folgenden beliebig durch x, y und z dividieren.
Der konstante Vektor grad g ist nicht der Nullvektor; im Maximum muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 20x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5} \\ 10x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 80 \\ 12 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Somit ist dort

$$\lambda = \frac{x^{-3/5}y^{1/5}z^{1/5}}{4} = \frac{5x^{2/5}y^{-4/5}z^{1/5}}{6} = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5}\,.$$

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $12x^{3/5}y^{4/5}z^{4/5}$ erhalten wir die Gleichungen $3yz = 10xz = 12xy$. Daraus folgt, daß $z = 4x$ und $y = \frac{10}{3}x$ ist. Einsetzen in die Nebenbedingung führt zu der Gleichung $80x + 40x + 40x = 24\,000$ oder $x = 150$. Somit ist $y = 500$ und $z = 600$. Der Funktionswert in diesem Punkt ist

$$f(150, 500, 600) = 50 \cdot 150^{2/5} \cdot \sqrt[5]{500} \cdot \sqrt[5]{600} \approx 4622{,}01\,.$$

Also können maximal 4622 Einheiten produziert werden.

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

Lösung: Dazu müssen wir

$$\lambda = x^{2/5}y^{1/5}z^{-4/5} = 150^{2/5} \cdot 500^{1/5} \cdot 600^{-4/5} \approx 0{,}154067$$

berechnen; der entsprechende Grenzpreis ist $1/\lambda \approx 6{,}49068$. Es lohnt sich also ab einem Stückpreis von 6 Euro 50.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) Welche Bedingung muß eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erfüllen, um im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ stetig zu sein?

Lösung: f ist stetig in x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ ist für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - y\| < \delta$. $\|\cdot\|$ steht dabei jeweils für irgendeine (feste) Norm auf $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{R}^m$.

b) Wann ist f stetig?

Lösung: f ist stetig, wenn f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ stetig ist.

c) Wie ist die Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in \mathbb{R}^n$ definiert?

Lösung: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, wenn es einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ gibt, so daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt derart, daß $\|x - x_k\| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$.

d) Zeigen Sie, nur unter Benutzung der Definitionen, daß für eine konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten des $\mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auch die Folge $\big(f(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert!

Lösung: Die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen x. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ ist, wenn $\|x - y\| < \delta$ ist. Zu diesem δ wiederum gibt es wegen der Konvergenz der Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so daß $\|x - x_k\| < \delta$ für alle $k \geq N$. Für $k \geq N$ ist daher $\|f(x) - f(x_k)\| < \varepsilon$, d.h. die Folge der $f(x_k)$ konvergiert gegen $f(x)$.

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $F(x, y) = x^4 + 5y + \sin(3y) = 0$ in der Umgebung eines jeden Punkts (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ nach y aufgelöst werden kann!

Lösung: $F_y(x, y) = 5 + 3\cos(3y)$ kann nicht verschwinden, da der Kosinus nur Werte zwischen -1 und 1 annimmt. Daher gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen in der Umgebung eines jeden Punktes eine Auflösung.

b) Welche Ableitung hat die auflösende Funktion $y = f(x)$ im Punkt (x_0, y_0)?

Lösung:

$$f'(x) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} = -\frac{4x_0^3}{5 + 3\cos 3y_0} .$$

c) Läßt sich $F(x, y) = 0$ auch in der Umgebung eines jedem Punkts (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ nach x auflösen?

Lösung: *Nein,* denn $F_x(x, y) = 4x^3$ verschwindet bei $x = 0$; dort ist $F(0, y) = 5y + \sin 3y$, was für $y = 0$ verschwindet. In der Umgebung von $(0, 0)$ läßt die die Gleichung daher nicht nach x auflösen.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Berechnen Sie

$$\int_Q (x^4 + 2xy^2 + y^5)\,!$$

Lösung:

$$\int_Q (x^4 + 2xy^2 + y^5) = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^4 + 2xy^2 + y^5)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^4 y + \frac{2xy^3}{3} + \frac{y^6}{6} \right) \Bigg|_0^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} \right) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{6} \Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}\,.$$

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie

$$\int_K \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,!$$

Lösung: Hier arbeiten wir am besten mit Polarkoordinaten; in diesen ausgedrückt ist der Integrand $\frac{\cos r}{r}$, und die Kreisscheibe besteht aus allen Punkten (r,φ) mit $0 \le r \le 1$. Somit ist

$$\int_K \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \frac{\cos r}{r} \cdot r\,dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \cos r\,dr \right) d\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin r \Big|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin 1\,d\varphi = 2\pi \cdot \sin 1\,,$$

wobei der Faktor r die Funktionaldeterminante des Übergangs zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ist.