Wolfgang K. Seiler A5, C201
Tel. 2515

31. August 2015

Modulklausur Analysis II

• • • **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** • • •
• • • **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** • • •
• • • **bearbeitet werden; konzentrieren Sie sich zunächst** • • •
• • • **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** • • •

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) *Richtig oder falsch:* Die Funktion $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die jedem Punkt (x, y) das Minimum von x und y zuordnet, ist stetig.

2) *Richtig oder falsch:* Wenn die Hesse-Matrix der mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Nullmatrix ist, ist f linear.

3) *Richtig oder falsch:* Die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ ist kompakt.

4) *Richtig oder falsch:* Jede Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger ist beschränkt.

5) *Richtig oder falsch:* Der Korrelationskoeffizient der zwanzig Datenpaare $\left(x, \cos\frac{x}{10}\right)$ für $x = 1, \ldots, 20$ ist positiv.

6) *Richtig oder falsch:* $f(y) = \int_{-2}^{3} \left(y^2 e^{x^2+y^2} + \sin\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1}\right) dx$ ist differenzierbar.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0, 0)$ für die Funktion $f(x, y) = 1 + e^{x^2-y}\sin(x^2 + y)$!

b) Lesen Sie daraus Gradient und Hesse-Matrix von f im Nullpunkt ab!

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von $g = x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$ um den Punkt $(0, 2)$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = xe^x + y^2e^{-x}$ auf $\mathbb{R}^2$!

b) Hat f ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

Ein Produkt wird aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 80 Euro, 12 Euro *bzw.* 10 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 24 000 Euro maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 24 000 Euro zu erhöhen?

Aufgabe 4: (*8 Punkte*)

a) Welche Bedingung muß eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ erfüllen, um im Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ stetig zu sein?

b) Wann ist f stetig?

c) Wie ist die Konvergenz einer Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten $x_k \in \mathbb{R}^n$ definiert?

d) Zeigen Sie, nur unter Benutzung der Definitionen, daß für eine konvergente Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von Punkten des $\mathbb{R}^n$ und eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ auch die Folge $\big(f(x_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert!

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Zeigen Sie, daß die Gleichung $F(x,y) = x^4 + 5y + \sin(3y) = 0$ in der Umgebung eines jeden Punkts (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ nach y aufgelöst werden kann!

b) Welche Ableitung hat die auflösende Funktion $y = f(x)$ im Punkt (x_0, y_0)?

c) Läßt sich $F(x,y) = 0$ auch in der Umgebung eines jedem Punkts (x_0, y_0) mit $F(x_0, y_0) = 0$ nach x auflösen?

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$. Berechnen Sie

$$\int_Q (x^4 + 2xy^2 + y^5)\,!$$

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie

$$\int_K \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,!$$

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Montag, dem 31. August 2015, um 18^{00} Uhr