WOLFGANG K. SEILER
Tel. 2515

A5, C201

9. Juni 2015

Modulklausur Analysis II

• • • Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen! • • •
• • • Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge • • •
• • • bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst • • •
• • • auf das, womit sie schnell Punkte holen können! • • •

Fragen: *(je* **zwei** *Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Elementen des $\mathbb{R}^n$, so konvergiert auch die Folge $\bigl(\max(x_k, y_k)\bigr)_{k\in\mathbb{N}}$.

Lösung: *Richtig,* denn $\max(x, y)$ ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}^2$: Auf der Teilmenge mit $x \geq y$ ist max die Projektion $(x, y) \mapsto x$, auf der mit $x \leq y$ die Projektion $(x, y) \mapsto y$. Beide sind stetig, und im Durchschnitt der beiden Bereiche, also auf der Geraden $y = x$, stimmen beide überein. Wie wir wissen, bilden stetige Funktionen konvergente Folgen auf konvergente Folgen ab, wobei der Grenzwert der Bildfolge das Bild des Grenzwerts der Ausgangsfolge ist.

Alternativ: $\max(x, y) = \frac{1}{2}\bigl((x+y+|x-y|\bigr)$ ist stetig als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen; weiter wie oben.

Alternativ: $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiere gegen (x, y). Dann konvergiert die Folge der x_k gegen x und die der y_k gegen y. Indem wir nötigenfalls zur Folge $(y_k, x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ übergehen, können wir o.B.d.A. annehmen, daß $x \geq y$ ist.

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2, so daß $|x - x_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_1$ und $|y - y_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N_2$. Für $k \geq N = \max(N_1, N_2)$ gilt beides,

Im Falle $x = y$ ist dann sowohl $|x - x_k| < \varepsilon$ als auch $|y - y_k| = |x - y_k| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$, also ist auch $|x - \max(x_k, y_k)| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$, denn $\max(x_k, y_k)$ muß gleich einem der beiden Werte sein.

Ist $x > y$, betrachten wir zunächst den Wert $\varepsilon = \frac{1}{2}(x-y)$. Für $k \geq N$ ist $|x - x_k| < \varepsilon$ und $|y - y_k| < \varepsilon$, also ist $y_k < y + \varepsilon$ und $x_k > x - \varepsilon$. Da $x - y = 2\varepsilon$ ist, muß $x_k \geq y_k$ sein, d.h. für alle $k \geq N$ stimmt die Folge der $\max(x_k, y_k)$ mit der der x_k überein und konvergiert daher ebenfalls gegen x.

NB: $\max(x_k, y_k)$ ist *nicht* die Maximumsnorm von (x_k, y_k); die ist $\max(|x_k|, |y_k|)$.

2) Richtig oder falsch: Wenn die erste Spalte der HESSE-Matrix der mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nur Nullen enthält, gibt es eine Konstante a sowie eine Funktion $g: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x_1, \ldots, x_n) = ax_1 + g(x_2, \ldots, x_n)$ ist.

Lösung: *Richtig,* denn in der ersten Spalte steht der Gradient der partiellen Ableitung f_{x_1}. Dieser ist genau dann identisch Null, wenn f_{x_1} gleich einer Konstanten a ist, und das wiederum ist äquivalent dazu, daß f die behauptete Form hat.

3) Richtig oder falsch: Die Menge

$$M = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2 + y^2 \leq 1\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

ist zusammenhängend.

Lösung: *Falsch:* M ist die Vereinigung zweier abgeschlossener Kreisscheiben mit Radius eins um die Punkte $(\pm 2, 0)$. Die entsprechenden offenen Kreisscheiben

$$U = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2 + y^2 < 2\right\} \quad \text{und} \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2 + y^2 < 2\right\}$$

vom Radius $\sqrt{2}$ sind immer noch disjunkt und $M \subset U \cup V$, aber M liegt weder in U noch in V.

4) Richtig oder falsch: Alle Normen auf $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind äquivalent.

Lösung: *Falsch:* Wie wir in der Vorlesung gesehen haben, sind die Supremumsnorm und die L^1-Norm nicht äquivalent.

5) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so auch die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(\cos x)$.

Lösung: *Falsch:* Sei etwa $f(x) = \begin{cases} |1 - 2|x|| & \text{falls } |x| \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Dann ist $g(x) \neq 0$ genau dann, wenn $|\cos x| \le \frac{1}{2}$ ist, d.h. der Träger von g ist die Vereinigung der abgeschlossenen Intervalle $\left[2k\pi - \frac{1}{3}\pi,\ 2k\pi + \frac{1}{3}\pi\right]$, wobei k die ganzen Zahlen durchläuft. Diese Menge ist unbeschränkt, also nicht kompakt.

6) Richtig oder falsch: Ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so auch

$$Z^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{es gibt ein } k \in \mathbb{N}, \text{ so daß } kx \in Z\right\}.$$

Lösung: *Richtig:* Jede der abzählbar vielen Mengen $\frac{1}{k}Z$ ist Nullmenge, da Bild von Z unter der Multiplikation mit $\frac{1}{k}$, und die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen ist wieder eine Nullmenge.

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = 1 + \sin(x + y^2)\cos(x^2 - y)$!

Lösung: Da wir um den Nullpunkt entwickeln, können wir direkt mit den Variablen x und y arbeiten und die aus der Analysis I bekannten TAYLOR-Reihen

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots \quad \text{und} \quad \cos w = 1 - \frac{w^2}{4} + \frac{w^4}{24} - \cdots$$

benutzen. Offensichtlich müssen nur z-Potenzen bis z^4 und w^4 betrachten, da alle höheren für $z = x + y^2$ und $w = x^2 - y$ nur Terme vom Grad mindestens fünf in x, y liefern. In

$$(x + y^2)^3 = x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6$$

sind nur die ersten beiden Summanden vom Grad höchstens vier, also ist

$$\sin(x + y^2) = x + y^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} + \textit{höhere Terme}.$$

$(x^2-y)^2 = x^4 - 2x^2y + y^2$ enthält nur Terme vom Grad höchstens vier; in $(x^2-y)^4$ ist y^4 der einzige solche Term. Daher ist

$$\cos(x^2-y) = 1 - \frac{x^4}{2} + x^2y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + \textit{höhere Terme}$$

und

$$f(x,y) = 1 + x + y^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2y^2}{2} + x^3y - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^4}{2} + \textit{höhere Terme}\,.$$

b) Lesen Sie daraus Gradient und HESSE-Matrix von f im Nullpunkt ab!

Lösung: Da f mindestens zweimal (tatsächlich sogar beliebig oft) stetig differenzierbar ist, ist die HESSE-Matrix symmetrisch; ist $\operatorname{grad} f(0,0) = \binom{a}{b}$ und $H_f(0,0) = \left(\begin{smallmatrix} c & d \\ d & e \end{smallmatrix}\right)$, so ist das TAYLOR-Polynom zweiten Grades um $(0,0)$

$$f(0,0) + \left\langle \operatorname{grad} f(0,0), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2}(x\ y)H_f(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(0,0) + ax + by + \tfrac{1}{2}cx^2 + dxy + \tfrac{1}{2}ey^2\,.$$

Koeffizientenvergleich zeigt, daß $a = 1$, $b = c = d = 0$ und $e = 2$ ist. Somit ist

$$\operatorname{grad} f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie das TAYLOR-Polynom zweiten Grades von $g = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ um den Punkt $(1,-1)$!

Lösung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 4x^3 + 3x^2y + 2xy^2 + y^3 & \frac{\partial g}{\partial x}(1,-1) &= 2\\
\frac{\partial g}{\partial y} &= x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4y^3 & \frac{\partial g}{\partial y}(1,-1) &= -2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= 12x^2 + 6xy + 2y^2 & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,-1) &= 8\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} &= 3x^2 + 4xy + 3y^2 & \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(-1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(1,-1) &= 2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= 2x^2 + 6xy + 12y^2 & \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(1,-1) &= 8
\end{aligned}$$

Somit ist $\operatorname{grad} g(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $H_g(1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$. Wegen $g(1,-1) = 1$ erhalten wir als TAYLOR-Polynom zweiten Grades $1 + 2h - 2k + 4h^2 + 2hk + 4k^2$.

Alternativ: Berechne die Terme vom Grad höchstens zwei in $g(1+h, -1+k)$:

$$\begin{aligned}
(1+h)^4 &= 1 + 4h + 6h^2 + \textit{höhere Terme}\\
(1+h)^3(-1+k) &= -1 - 3h + k - 3h^2 + 3hk + \textit{höhere Terme}\\
(1+h)^2(-1+k)^2 &= 1 + 2h - 2k + h^2 + k^2 + \textit{höhere Terme}\\
(1+h)(-1+k)^3 &= -1 - h + 3k - hk - 3k^2 + \textit{höhere Terme}\\
(-1+k)^4 &= 1 - 4k + 6k^2 + \textit{höhere Terme}
\end{aligned}$$

Somit ist $g(1+h, -k+1) = 1 + 2h - 2k + 4h^2 + 2hk + 4k^2 + \textit{höhere Terme}$, und wir erhalten (natürlich) das gleiche TAYLOR-Polynom wie oben.

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 + 4y^3 - 3xy^2 - 3y^2$ auf $\mathbb{R}^2$!

Lösung: f ist beliebig oft differenzierbar, also können wir mit Gradient und HESSE-Matrix arbeiten. Die partiellen Ableitungen von f sind

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 - 3y^2 \\ f_y(x,y) &= 12y^2 - 6xy - 6y \\ f_{xx}(x,y) &= 6x \\ f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) &= -6y \\ f_{yy}(x,y) &= 24y - 6x - 6 \end{aligned} \quad .$$

Verschwindet der Gradient, so ist insbesondere

$$f_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 = 3(x+y)(x-y) = 0\,,$$

also ist entweder $y = x$ oder $y = -x$. Im Falle $y = x$ ist

$$f_y(x,y) = f_y(x,x) = 12x^2 - 6x^2 - 6x = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)\,,$$

also $x = y = 0$ oder $x = y = 1$.
Im Falle $y = -x$ ist $f_y(x,y) = f_y(x,-x) = 12x^2 + 6x^2 + 6x = 18x^2 + 6x = 6x(3x+1)$, also ist hier $x = y = 0$ oder $x = -\frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3}$.
Im Punkt $(0,0)$ ist $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, gibt uns also keine Auskunft über den Punkt. Da aber $f(x,0) = x^3$ ist, sehen wir auch so, daß er kein relatives Extremum sein kann.
$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$ hat Determinante $6 \cdot 12 - 6 \cdot 6 = 6 \cdot 6 > 0$; da der Eintrag links oben positiv ist, ist die Matrix positiv definit, so daß wir im Punkt $(1,1)$ ein relatives Minimum haben.
$H_f(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ hat Determinante $-8 - 4 < 0$, ist also indefinit; daher haben wir hier einen Sattelpunkt und damit kein relatives Extremum.

b) Hat f ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

Lösung: Da $f(x,0) = x^3$ keines hat, kann auch f keines haben.

Aufgabe 3: *(8 Punkte)*

Ein Produkt wird aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 100 Euro, 200 Euro *bzw.* 400 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $100x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 1,6 Millionen Euro maximal gefertigt werden?

Lösung: Da die Funktion $f(x,y,z) = 100x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4}$ bei zwei festgehaltenen Variablen eine monoton wachsende Funktion der dritten ist, wird das Maximum beim Einsatz von genau 1,6 Millionen Euro erreicht, die Nebenbedingung ist also

$$g(x,y,z) = 100x + 200y + 400z - 1\,600\,000 = 0\,.$$

Das Maximum wird sicher nicht in einem Punkt angenommen, in dem eine der drei Variablen verschwindet, denn dort hat f den Wert Null; wir können also im folgenden beliebig durch x, y und z dividieren.

Der konstante Vektor grad g ist nicht der Nullvektor; im Maximum muß es daher ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit

$$\operatorname{grad} f = \begin{pmatrix} 25x^{-3/4}y^{1/2}z^{1/4} \\ 50x^{1/4}y^{-1/2}z^{1/4} \\ 25x^{1/4}y^{1/2}z^{-3/4} \end{pmatrix} = \lambda \operatorname{grad} g = \lambda \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} .$$

Somit ist dort $4\lambda = x^{-3/4}y^{1/2}z^{1/4} = x^{1/4}y^{-1/2}z^{1/4} = \dfrac{1}{4}x^{1/4}y^{1/2}z^{-3/4}$.

Durch Multiplikation mit dem Hauptnenner $4x^{3/4}y^{1/2}z^{3/4}$ erhalten wir die Gleichungen $4yz = 4xz = xy$. Daraus folgt, daß $x = y = 4z$ ist. Einsetzen in die Nebenbedingung führt zu der Gleichung $100 \cdot 4z + 200 \cdot 4z + 400z = 1\,600z = 1\,600\,000$ oder $z = 1\,000$. Somit ist $x = y = 4\,000$ und $z = 1\,000$. Der Funktionswert in diesem Punkt ist

$$\begin{aligned} f(4\,000, 4\,000, 1\,000) &= 100 \cdot 4\,000^{1/4} \cdot 4\,000^{1/2} \cdot 1\,000^{1/4} = 100 \cdot \sqrt[4]{4\,000 \cdot 1\,000} \cdot \sqrt{4\,000} \\ &= 100 \cdot \sqrt{2\,000} \cdot \sqrt{4\,000} = 200\,000\,\sqrt{2} \approx 282\,842{,}7 . \end{aligned}$$

Also können maximal 282 842 Einheiten produziert werden.

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 1,6 Millionen Euro zu erhöhen?

Lösung: Dazu müssen wir

$$\lambda = \frac{1}{4}x^{-3/4}y^{1/2}z^{1/4} = \frac{\sqrt{4000} \cdot \sqrt[4]{1\,000}}{4 \cdot \sqrt{4\,000} \cdot \sqrt[4]{4\,000}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0{,}1767767$$

berechnen; der entsprechende Grenzpreis ist $1/\lambda = 4\sqrt{2} \approx 5{,}657$. Es lohnt sich also ab einem Stückpreis von 5 Euro 66.

Aufgabe 4: *(8 Punkte)*

a) D sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wann ist eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}^m$ stetig?

Lösung: f ist stetig, wenn es zu jedem $x \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ ist für alle $y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$. $\|\cdot\|$ steht dabei jeweils für irgendeine (feste) Norm auf $\mathbb{R}^n$ *bzw.* $\mathbb{R}^m$.

b) Wann ist f gleichmäßig stetig?

Lösung: f ist gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$ ist für alle $x, y \in D$ mit $\|x - y\| < \delta$.

c) Nun sei $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) = \log(1 - x^2 - y^2) .$$

Zeigen Sie, daß f auf D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist!

Lösung: f ist stetig auf D, denn das Polynom $1 - x^2 - y^2$ ist stetig auf ganz $\mathbb{R}^2$ und liefert auf D nur positive Werte. Da der Logarithmus stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist, folgt die Stetigkeit der Hintereinanderausführung.

f ist aber nicht gleichmäßig stetig auf D, denn gäbe es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $\left|\log(1 - x^2 - y^2) - \log(1 - u^2 - v^2)\right| < \varepsilon$ für alle (x,y) und $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ mit $\|(x,y) - (u,v)\| < \delta$, so wäre insbesondere für $0 < x < u < 1$ und $|x - u| < \delta$

$$\left|\log(1 - x^2) - \log(1 - u^2)\right| = \log\frac{1 - x^2}{1 - u^2} < \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{1 - x^2}{1 - u^2} < e^{\varepsilon} .$$

Wählen wir ein festes $x \in (1-\delta,\ \delta)$, so wäre also $g(u) = \dfrac{1-x^2}{1-u^2}$ auf dem Intervall $(1-2\delta,\ 1)$ beschränkt, im Widerspruch zu der Tatsache, daß $\lim\limits_{u\to\infty} g(u) = \infty$ ist.

.

d) Ist die Einschränkung von f auf $D' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 < \frac{1}{2}\right\}$ gleichmäßig stetig?

Lösung: $D'' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2+y^2 \le \frac{1}{2}\right\}$ ist eine kompakte Teilmenge von D; da f auf D und damit insbesondere auf D'' stetig ist, ist f auf D'' daher gleichmäßig stetig. Damit ist f auch auf der Teilmenge $D' \subset D''$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 5: *(8 Punkte)*

a) Was besagt der BANACHsche Fixpunktsatz? Definieren Sie dazu auch die vorkommenden Begriffe! Die Begriffe *normierter Vektorraum offen, abgeschlossen,* CAUCHY-*Folge* und *Fixpunkt* können Sie dabei als bekannt voraussetzen.

Lösung: V sei ein BANACH-Raum, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum, wobei die Vollständigkeit bedeutet, daß jede CAUCHY-Folge aus V einen Grenzwert in V hat. Weiter sei $X \subseteq V$ eine abgeschlossene Teilmenge, und $f\colon X \to V$ eine kontrahierende Abbildung mit $f(X) \subseteq X$, d.h. es gibt eine reelle Zahl $c < 1$, so daß $\|f(y) - f(x)\| \le c \cdot \|x - y\|$ für alle $x, y \in X$. Dann hat f genau einen Fixpunkt $x^* \in X$, und für jedes $x_0 \in X$ konvergiert die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = f(x_{n-1})$ gegen x^*.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x}\cos x$ auf dem Intervall $[0,\ 1]$ streng monoton fällt, ihre Ableitung dort streng monoton wächst, und daß f das Intervall $[f(1),\ 1]$ auf sich selbst abbildet!

Lösung: Da e^{-x} auf ganz $\mathbb{R}$ und $\cos x$ in $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ monoton fallen und nicht negativ werden, ist auch ihr Produkt in $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ und damit erst recht in $[0,\ 1]$ monoton fallend. Alternativ folgt es auch daraus, daß $f'(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$ in $(0,\ 1]$ nur negative Werte annimmt, da e^{-x}, $\sin x$ und $\cos x$ dort nur positive Werte annehmen.
f' hat nach der Produktregel die Ableitung

$$f''(x) = -e^{-x}(-\sin x + \cos x) + e^{-x}(\cos x + \sin x) = 2e^{-x}\sin x\,;$$

da im Intervall $(0,\ 1]$ beide Faktoren positiv sind, gilt dasselbe für $f''(x)$, d.h. f' ist streng monoton wachsend.
Da f in $[0,\ 1]$ monoton fällt, ist der minimale Wert, der dort angenommen wird, $f(1)$. Er liegt im Intervall $[0,\ 1]$, da sowohl e^{-1} als auch $\cos 1$ dort liegen. Da $f(0) = 1$ ist und die Funktion monoton fällt, gilt daher für alle $x \in [0,\ 1]$, daß $f(1) \le f(x) \le 1$ ist. Somit wird insbesondere das Intervall $\left[f(1),\ 1\right]$ auf sich selbst abgebildet.

c) Zeigen Sie, daß die Gleichung $x = e^{-x}\cos x$ genau eine Lösung im Intervall $[0,\ 1]$ hat!

Lösung: Die Behauptung besagt, daß die Funktion f aus *b)* im Intervall $[0,\ 1]$ genau einen Fixpunkt hat. Da $f(x)$ für alle Punkte daraus in $[f(1),\ 1]$ liegen, muß auch der Fixpunkt dort liegen. Wir wissen bereits, daß f dieses Intervall auf sich selbst abbildet; um den BANACHschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir noch zeigen, daß f dort kontrahierend ist. Dazu reicht es zu zeigen, daß der Betrag der Ableitung dort durch eine Konstante $c < 1$ beschränkt ist. Wie wir aus *b)* wissen, ist $f'(x)$ auf $[0,\ 1]$ streng monoton wachsend; deshalb ist für alle $x \in [0,\ 1]$

$$f'(0) = -1 \le f'(x) \le f'(1) = -e^{-1}\cos 1 < 0\,.$$

Für $x \in [f(1), 1]$ ist also

$$-1 < f'\big(f(1)\big) \le -e^{-1}\cos 1 \quad \text{und damit} \quad |f'(x)| \le f'\big(f(1)\big) < 1\,.$$

Mit $c = f'\big(f(1)\big)$ haben wir daher die gesuchte Konstante gefunden und so gezeigt, daß die Abbildung kontrahierend ist. Aus dem BANACHschen Fixpunktsatz folgt nun, daß es genau einen Fixpunkt gibt.

d) Geben Sie eine Folge an, die gegen diese Lösung konvergiert!

Lösung: Die Folge mit $x_1 = 1$ und $x_{k+1} = f(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert nach dem BANACHschen Fixpunktsatz gegen diese Lösung.

Aufgabe 6: *(8 Punkte)*

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q (x^6 + x^2y^2 + y^3)$!

Lösung:

$$\int_Q (x^6 + x^2y^2 + y^3) = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-1}^{1} (x^6 + x^2y^2 + y^3)\,dy \right) dx = \int_{-1}^{1} \left(x^6y + \frac{x^2y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_{-1}^{1} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(2x^6 + \frac{2}{3}x^3 \right) dx = \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^3}{9}\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{7} + \frac{4}{9} = \frac{64}{63}\,.$$

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie $\int_K (x^2 + y^2)^{3/2}$!

Lösung: Hier arbeiten wir am besten mit Polarkoordinaten; in diesen ausgedrückt ist der Integrand $\big(r^2\big)^{3/2} = r^3$, und die Kreisscheibe besteht aus allen Punkten (r, φ) mit $0 \le r \le 1$. Somit ist

$$\int_K (x^2 + y^2)^{3/2} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 \cdot r\,dr \right) d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^4\,dr \right) d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{r^5}{5}\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5}\,d\varphi = \frac{2\pi}{5}\,,$$

wobei der Faktor r die Funktionaldeterminante des Übergangs zwischen kartesischen und Polarkoordinaten ist.