Wolfgang K. Seiler — A5, C201
Tel. 2515

9. Juni 2015

Modulklausur Analysis II

••• **Schreiben Sie bitte auf jedes Blatt Ihren Namen!** •••
••• **Die Aufgaben müssen *nicht* in der angegebenen Reihenfolge** •••
••• **bearbeitet werden; konzentrieren sie sich zunächst** •••
••• **auf das, womit sie schnell Punkte holen können!** •••

Fragen: *(je zwei Punkte)*
Die Antworten auf die nachfolgenden Fragen sollten nicht länger als etwa zwei Zeilen sein und lediglich eine kurze *Begründung enthalten. Antworten ohne Begründung werden nicht gewertet.*

1) Richtig oder falsch: Ist $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge von Elementen des $\mathbb{R}^n$, so konvergiert auch die Folge $\big(\max(x_k, y_k)\big)_{k\in\mathbb{N}}$.

2) Richtig oder falsch: Wenn die erste Spalte der Hesse-Matrix der mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nur Nullen enthält, gibt es eine Konstante a sowie eine Funktion $g\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, so daß $f(x_1, \dots, x_n) = ax_1 + g(x_2, \dots, x_n)$ ist.

3) Richtig oder falsch: Die Menge

$$M = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x-2)^2+y^2\le 1\right\} \cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; (x+2)^2+y^2\le 1\right\}$$

ist zusammenhängend.

4) Richtig oder falsch: Alle Normen auf $K^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sind äquivalent.

5) Richtig oder falsch: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit kompaktem Träger, so auch die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(\cos x)$.

6) Richtig oder falsch: Ist $Z \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so auch

$$Z^* = \left\{x\in\mathbb{R}^n \;\middle|\; \text{es gibt ein } k\in\mathbb{N}, \text{ so daß } kx\in Z\right\}.$$

Aufgabe 1: *(8 Punkte)*

a) Berechnen Sie das Taylor-Polynom vom Grad vier um den Punkt $(0,0)$ für die Funktion $f(x,y) = 1 + \sin(x+y^2)\cos(x^2-y)$!

b) Lesen Sie daraus Gradient und Hesse-Matrix von f im Nullpunkt ab!

c) Berechnen Sie das Taylor-Polynom zweiten Grades von $g = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$ um den Punkt $(1,-1)$!

Aufgabe 2: *(8 Punkte)*

a) Bestimmen Sie die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = x^3 + 4y^3 - 3xy^2 - 3y^2$ auf $\mathbb{R}^2$!

b) Hat f ein absolutes Maximum und/oder Minimum?

••• **Bitte wenden!** •••

Aufgabe 3: (*8 Punkte*)

Ein Produkt wird aus drei Ressourcen hergestellt, die jeweils 100 Euro, 200 Euro *bzw.* 400 Euro pro Einheit kosten. Aus x Einheiten der ersten, y Einheiten der zweiten und z Einheiten der dritten lassen sich $100x^{1/4}y^{1/2}z^{1/4}$ Einheiten des Produkts fertigen. Wie viele Einheiten können mit höchstens 1,6 Millionen Euro maximal gefertigt werden?

b) Ab welchem Stückpreis für das fertige Produkt lohnt es sich, den Einsatz von 1,6 Millionen Euro zu erhöhen?

Aufgabe 4: (*8 Punkte*)

a) D sei eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$. Wann ist eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}^m$ stetig?

b) Wann ist f gleichmäßig stetig?

c) Nun sei $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < 1\right\}$ und $f: D \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)\,.$$

Zeigen Sie, daß f auf D stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist! .

d) Ist die Einschränkung von f auf $D' = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\right\}$ gleichmäßig stetig?

Aufgabe 5: (*8 Punkte*)

a) Was besagt der BANACHsche Fixpunktsatz? Definieren Sie dazu auch die vorkommenden Begriffe! Die Begriffe *normierter Vektorraum offen, abgeschlossen,* CAUCHY-*Folge* und *Fixpunkt* können Sie dabei als bekannt voraussetzen.

b) Zeigen Sie, daß die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x} \cos x$ auf dem Intervall $[0, 1]$ streng monoton fällt, ihre Ableitung dort streng monoton wächst, und daß f das Intervall $[f(1), 1]$ auf sich selbst abbildet!

c) Zeigen Sie, daß die Gleichung $x = e^{-x} \cos x$ genau eine Lösung im Intervall $[0, 1]$ hat!

d) Geben Sie eine Folge an, die gegen diese Lösung konvergiert!

Aufgabe 6: (*8 Punkte*)

a) Q sei das Quadrat mit Ecken $(\pm 1, \pm 1)$. Berechnen Sie $\int_Q (x^6 + x^2y^2 + y^3)$!

b) K sei die Kreisscheibe mit Radius eins um den Nullpunkt. Berechnen Sie $\int_K (x^2 + y^2)^{3/2}$!

• • • **Steht Ihr Name auf jedem Blatt?** • • •

Abgabe bis zum Dienstag, dem 9. Juni 2015, um 8^{30} Uhr